www.isijournal.net

637D

637
D

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

عصر جمعه
۹۳/۱۱/۱۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل ـ سال ۱۳۹۴

مجموعه ریاضی ـ کد ۱۲۰۸

تعداد سؤال: ۱۳۵ | مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعدادسؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی،مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

بهمن ماه ـ سال ۱۳۹۳

حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

www.isijournal.net

زبان عمومی و تخصصی:

PART A: Vocabulary

Directions: *Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark your answer sheet.*

1- Your new spokesperson is very --------- and clearly comfortable speaking in front of large audiences.
1) impatient 2) willful 3) voluble 4) modish

2- That ring is made from an --------- of minerals; if it were pure gold it would never hold its shape.
1) occurrence 2) elaboration 3) intervention 4) amalgam

3- Fortunately, the parliament --------- the new law that would prohibit companies from discriminating according to race in their hiring practices.
1) abridged 2) ratified 3) magnified 4) persuaded

4- The teacher did not appreciate the student's --------- and gave him detention.
1) sarcasm 2) advent 3) blunder 4) reverie

5- The police have not yet been able to find the missing child; to all of the searchers, the child's location is still a great ---------.
1) fallacy 2) enigma 3) remorse 4) sympathy

6. I really feel sad to say that we are now witnessing environmental destruction on an --------- scale.
1) implicit 2) inadvertent 3) articulated 4) unprecedented

7- Ted was severely --------- by his colleagues for his use of offensive language when addressing the guests.
1) deviated 2) castigated 3) resigned 4) hardened

8- As shrinking military budgets add to economic woes, arms manufacturers are --------- seeking to expand their markets.
1) nocturnally 2) equivocally 3) indecisively 4) aggressively

9- Much to my ---------, I should confess that we don't have a good indication that women are actually taking better care of themselves today.
1) indifference 2) verification 3) chagrin 4) jubilance

10- It is to be remembered that living in a --------- country is no guarantee you will necessarily live a long life.
1) prosperous 2) conceptual 3) conceivable 4) long-winded

PART B: Cloze Passage

Directions: *Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark your answer sheet.*

The human question is the big one. (11) --------- on humans are very thin. Most human populations that are forced to survive on low-calorie diets are also malnourished and are as likely (12) --------- from vitamin and mineral deficiencies. (13) --------- is on the Japanese island of Okinawa, Walford notes: "The Okinawans have about (14) --------- the calorie intake of the rest of Japan. They eat mainly fish and vegetables. They have as much as 40 times the incidence of people (15) --------- 100. They have less diabetes, tumors and so forth than the rest of Japan."

11- 1) The data exist 2) The data whose existence
3) Existing data that are 4) The existing data

12- 1) not to die as prematurely 2) as not to die prematurely
3) so not to prematurely die 4) not to die prematurely as

13- 1) Only one exception to know 2) The only exception to know
3) The only known exception 4) One exception is only known

www.isijournal.net

14- 1) 70 percent of 2) a percentage of 70
3) 70 percent 4) 70 of the percentage
15- 1) in 2) for 3) over 4) with

PART C: Reading Comprehension

***Directions**: Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4) and then mark the correct choice on your answer sheet.*

PASSAGE 1:

I personally believe that many more people need linear algebra than calculus. Isaac Newton might not agree! But he isn't teaching mathematics in the 21st century (and maybe he wasn't a great teacher, but we will give him the benefit of the doubt). Certainly the laws of physics are well expressed by differential equations. Newton needed calculus – quite right. But the scope of science and engineering and management (and life) is now so much wider, and linear algebra has moved into a central place.

May I say a little more, because many universities have not yet adjusted the balance toward linear algebra. Working with curved lines and curved surfaces, the first step is always to linearize. Replace the curve by its tangent line, fit the surface by a plane, and the problem becomes linear. The power of this subject comes when you have ten variables, or 1000 variables, instead of two.

You might think I am exaggerating to use the word "beautiful" for a basic course in mathematics. Not at all. This subject begins with two vectors v and w, pointing in different directions (not opposite). The key step is to take their linear combinations. We multiply to get 3v and 4w, and we add to get the particular combination 3v + 4w. That new vector is in the same plane as v and w. When we take all combinations, we are filling in the whole plane. If I draw v and w on this page, their combinations cv + dw fill the page (and beyond), but they don't go up from the page.

16- According to the passage, which of the following is true?
1) Isaac Newton did not need linear algebra.
2) Physics and linear algebra are independent.
3) Isaac Newton might not have appreciated the value of linear algebra.
4) Mathematics teachers do not need calculus at all.

17- Which of the following is closest in meaning to the word "scope" in line 4?
1) Environs 2) Gradient 3) Importance 4) Correlation

18- What does the word "linearize" in line 9 mean?
1) Working with fewer variables
2) To replace a curve by a tangent line
3) To work with equations with at least one variable of degree one
4) To work with equations of the same degree in each variable

19- Consider two vectors v and w in a plane P. Which of the following is correct?
1) There is some vector in P which is not a linear combination of v and w.
2) Every vector in P is a linear combination of v and w.
3) It is possible, 3v+5w does not lie in P.
4) Every linear combination of v and w lies in P.

www.isijournal.net

20- According to the passage, which of the following is true?

1) Attention to the role of linear algebra is not as it should be.
2) The beauty of a basic course in mathematics is artificial.
3) The power of linearizing can be seen when we work with 2 variables.
4) Differential equations cannot be studied via linear algebra.

PASSAGE 2:

In the Godel-Bernays form of axiomatic set theory, which we shall follow, the primitive (undefined) notions are class, membership, and equality. Intuitively we consider a class to be a collection A of objects (elements) such that given any object x it is possible to determine whether or not x is a member (or element) of A. We write $x \in A$ for "x is an element of A" and $x \notin A$ for "x is not an element of A". The axioms are formulated in terms of these primitive notions and the first-order predicate calculus (that is, the language of sentences built up by using the connectives and, or, not, implies and the quantifiers there exists and for all). The axiom of extensionality asserts that two classes with the same elements are equal.

A class A is defined to be a set if and only if there exists a class B such that $A \in B$. Thus a set is a particular kind of class. A class that is not a set is called a proper class. The axiom of class formation asserts that for any statement P(y) in the first-order predicate calculus involving a variable y, there exists a class A such that $x \in A$ if and only if x is a set and the statement P(x) is true. We denote this class A by $\{x \mid P(x)\}$.

Example: Consider the class $M = \{X \mid X \text{ is a set and } X \notin X\}$. The statement $X \notin X$ is not unreasonable since many sets satisfy it (for example, the set of all books is not a book). M is a proper class. For if M were a set, then either $M \in M$ or $M \notin M$. But by the definition of M, $M \notin M$ implies $M \in M$ and $M \in M$ implies $M \notin M$. Thus in either case the assumption that M is a set leads to an untenable paradox: $M \in M$ and $M \notin M$.

21- For a class A and the object x ----------.

1) it is impossible $x \in x$
2) it is possible $x \in A$ and $x \notin A$
3) the membership of x in A depends on A is a set or not
4) one can find x is an element of A or not

22- A set A is a class ----------.

1) which belongs to every class
2) which is a member of a class
3) in which $x \in A$ if and only if x is not a set
4) for which, $x \in A$ implies x is a set

23- The equality of two classes A and B is related to the ----------.

1) axiom of extensionality
2) axiom of class formation
3) axiom of choice
4) condition of they are proper classes or not

24- According to the axiom of class formation ----------.

1) each member of a class A is a set
2) a proper class is a set
3) every statement in a variable x corresponds to a class
4) $M = \{X \mid X \text{ is a set and } X \notin X\}$ is a set

www.isijournal.net

25- According to the passage ----------.

1) a set is an undefined notion
2) the connectors and, or, implies are used in formulation of axioms
3) every class is a set
4) there exists a set U such that, for every set A, $A \in U$

PASSAGE 3:

A useful result in linear algebra states that if V is a finite-dimensional vector space and x: $V \rightarrow V$ is a nilpotent linear map, then there is a basis of V in which x is represented by a strictly upper triangular matrix.

To understand Lie algebras, we need a much more general version of this result. Instead of considering a single linear transformation, we consider a Lie subalgebra L of $gl(V)$. We would like to know when there is a basis of V in which every element of L is represented by a strictly upper triangular matrix.

As a strictly upper triangular matrix is nilpotent, if such a basis exists then every element of L must be a nilpotent map. Surprisingly, this obvious necessary condition is also sufficient; this result is known as Engel's Theorem.

It is also natural to ask the related question: When is there a basis of V in which every element of L is represented by an upper triangular matrix? If there is such a basis, then L is isomorphic to a subalgebra of a Lie algebra of upper triangular matrices, and so L is solvable. Over C (the complex numbers) at least, this necessary condition is also sufficient. We prove this result, Lie's Theorem, in the next section.

26- According to the passage, if x is a nilpotent linear map then ----------.

1) a lower triangular matrix cannot represent x
2) the matrix of x is strictly upper triangular
3) every power of x is nonzero
4) x can be represented by a strictly upper triangular matrix

27- According to the Engel's Theorem, in a nilpotent Lie algebra L every ----------.

1) element is nilpotent.
2) x belonging to L is diagonalizable
3) basis leads to a simultaneous strictly upper triangular matrix representation
4) element has a nonzero trace

28- According to the passage, ----------.

1) every solvable Lie algebra is nilpotent
2) a Lie algebra L is solvable if and only if it is nilpotent
3) in a solvable Lie algebra every element is nilpotent
4) the solvability of a Lie algebra L does not suffice for L to be nilpotent

29- By the Lie's Theorem in every complex Lie algebra L there is some basis in which every element ----------.

1) has trace 0
2) is an upper triangular matrix
3) is diagonalizable
4) is a strictly upper triangular matrix

30- According to the passage, the characteristic of the field on which the vector space V is defined ----------.

1) is important in Engel's Theorem
2) is not necessary at all
3) is essential in Lie's Theorem
4) should be finite

www.isijournal.net

دروس پایه:

ریاضیات عمومی

۳۱- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cosh t\vec{j}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{\cosh t}$

۲) $\frac{t}{\cosh^۲ t}$

۳) $\frac{۱}{\cosh ۲t}$

۴) $\frac{۱}{\cosh^۲ t}$

۳۲- اگر T مکعبی در اول فضا باشد که رئوس آن $(۰,۰,۰)$و $(۱,۰,۰)$ و $(۰,۱,۰)$و $(۰,۰,۱)$ هستند، مقدار انتگرال $\iiint_T e^{x+y+z} dv$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}(e-۱)^۳$

۲) $e^۳ - ۱$

۳) $e^۳ + ۱$

۴) $(e+۱)^۳$

۳۳- مقدار مشتق پنجم $f(x) = \frac{x}{۱-x^۲}$ در $x = ۰$ کدام است؟

۱) ۱۲۰

۲) -۱۲۰

۳) -۱

۴) ۱

۳۴- سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{n}{۷^{n-۱}} + \dots$

۱) واگراست.

۲) همگراست و مجموع آن $۱ + \frac{۴۹}{۳۶}$ است.

۳) همگراست و مجموع آن $\frac{۷}{۶}$ است.

۴) همگراست و مجموع آن $\frac{۴۹}{۳۶}$ است.

www.isijournal.net

۳۵- مجموعه نقاط z در صفحه مختلط $|z|^۲ - ۳|z| + ۲ < ۰$ کدام است؟

۱) $\{x+iy \mid ۲ < x^۲ + y^۲ < ۴\}$

۲) $\{x+iy \mid ۱ < x^۲ + y^۲ < ۴\}$

۳) $\{x+iy \mid ۱ < x^۲ + y^۲ < ۳\}$

۴) $\{x+iy \mid ۱ < x^۲ + y^۲ < ۵\}$

۳۶- مقدار انتگرال معین $\int_{۰}^{\ln ۲} e^x \ln(e^{-x}+۱)dx$ کدام است؟

۱) $\ln(\frac{۴}{۲۷})$

۲) $\ln(\frac{۲۷}{۴})$

۳) $\ln(\frac{۲۷}{۱۶})$

۴) $\ln(\frac{۹}{۴})$

۳۷- f تابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده که به ازای $a \neq ۰$،

$$\int_{۰}^{a} (f'(x) + x\, f''(x))dx = a .$$

مقدار $f'(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}a$

۲) ۰

۳) ۱

۴) a

۳۸- ماکسیمم مقدار $f(x,y) = ۹ - x^۲ - y^۲$ روی خط $x+y=۳$، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۳}$

۲) $\frac{۱۳}{۲}$

۳) $\frac{۹}{۲}$

۴) $\frac{۲}{۹}$

www.isijournal.net

۳۹- مقدار انتگرال $\iint_A xe^{x^2-y^2}dydx$ که در آن A ناحیه محدود به خطوط $y=x$، $y=x-1$ ، $y=1$ و $y=0$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi^3+\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{4}e^3-\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{4}\pi^3-\frac{1}{2}$

مبانی علوم ریاضی

۴۰- نقیض گزاره زیر کدام است؟

«هر دانشجوی این کلاس حداقل دو برادر دارد»

۱) هر دانشجوی این کلاس حداکثر دو برادر دارد.

۲) دانشجویی در این کلاس هست که حداکثر یک برادر دارد.

۳) دانشجویی در این کلاس هست که یک یا دو خواهر دارد.

۴) دانشجویی در این کلاس هست که یک یا دو برادر دارد.

۴۱- فرض کنیم f تابعی بر X به توی Y باشد و $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X و $\{B_\alpha\}_{\alpha\in J}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های Y باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in J} B_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$

۲) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in J} B_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in J} f^{-1}(B_\alpha)$

۳) $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

۴) $f(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

۴۲- فرض کنیم $A\cong B$ به مفهوم هم عدد (هم‌ارز) بودن A و B باشد. کدام گزینه نادرست است؟

$\mathbb{N}$ نمایش اعداد طبیعی، $\mathbb{Z}$ نمایش اعداد صحیح، $\mathbb{Q}$ نمایش اعداد گویا و $\mathbb{R}$ نمایش اعداد حقیقی است.

۱) $\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\cong\mathbb{N}$

۲) اگر $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=1\}$ آنگاه $S\cong\mathbb{R}$

۳) یک تابع یک به یک و پوشا بین $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ وجود دارد.

۴) مجموعهٔ اعداد اصمی که جبری نیستند با مجموعهٔ $A=\{\sqrt[n]{r}: n\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{Q}\}$ هم‌عدد است.

www.isijournal.net

۴۳- فرض کنیم رابطهٔ $\cong$ در مجموعه‌ها به مفهوم هم‌عدد (هم ارز) بودن و نماد $A \leq B$ به این مفهوم باشد که A با زیر مجموعه‌ای از B هم‌عدد (هم ارز) است. اگر $A \cong B$ و $C \cong D$ آنگاه:

۱) $A \leq C$ اگر و تنها اگر $B \leq D$

۲) $A \cup C \cong B \cup D$

۳) $A \cap C \cong B \cap D$

۴) $A \times B \cong C \times D$

۴۴- فرض کنیم Y زیر مجموعه‌ای از X باشد و $X - Y = \{x \in X : x \notin Y\}$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) مجموعهٔ X نامتناهی است اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعهٔ متناهی Y از X، $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card}(X - Y)$

۲) اگر X مجموعهٔ نامتناهی و $f : X \to Z$ تابعی یک به یک باشد آنگاه Z نامتناهی است.

۳) اگر X و Y هر دو نامتناهی باشند و $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$ آنگاه $X - Y$ متناهی است.

۴) اگر X نامتناهی و $X - Y$ متناهی باشد آنگاه $\operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$

۴۵- کدام یک از گزاره‌های زیر اصل موضوع انتخاب است؟

۱) از هر مجموعه‌ای ناتهی می توان یک عضو انتخاب کرد.

۲) به ازای هر دو عدد اصلی α و β که $\alpha < \beta$، می‌توان یک عدد اصلی مانند γ انتخاب کرد که $\alpha < \gamma < \beta$

۳) حاصل‌ضرب دکارتی خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی، ناتهی است.

۴) اگر $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ خانواده‌ای ناتهی از مجموعه‌های ناتهی باشد نمی‌توان مجموعه‌ای ساخت که از هر A_α فقط یک عضو داشته باشد.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی

۴۶- فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ ۵ & -۲ \end{pmatrix}$. کدام یک از زیرفضاهای $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ روی میدان $\mathbb{C}$ ، تحت A پایا هستند ($\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط است)؟

۱) $< (۱+i , ۲) >$

۲) $< (۱+i , ۱-i) >$

۳) $< (۲ , ۲+i) >$

۴) $< (۲ , ۱-۲i) >$

۴۷- فرض کنید $X = [۱ , ۰ , a , ۱ , b]$ ماتریسی ۱×۵ با درایه‌های حقیقی باشد. کدام گزینه در مورد پوچی ماتریس $X^t X$ صحیح است؟

۱) پوچی برابر ۴ است.

۲) پوچی برابر ۳ است.

۳) اگر $a = b = ۰$ ، پوچی برابر ۲ است.

۴) اگر $a = b = ۱$ ، پوچی برابر ۱ است.

www.isijournal.net

۴۸- فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و فضای برداری $V=\mathbb{C}^4$ را روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. فرض کنید $W=W_1+W_2$ که $W_1=<(1,1,1,0),(-1,0,1,-1)>$, $W_2=<(0,1,2,-1),(i,0,1,1)>$ زیر $\mathbb{C}$ فضاهای V باشند. در این صورت بعد W به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

۴۹- فرض کنید $X=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ یک نگاشت خطی با ضابطه $T(A)=XA-AX$ باشد. کدام گزینه دربارهٔ بعد هسته T صحیح است؟

۱) $\dim\ker T=0$

۲) $\dim\ker T=1$

۳) $\dim\ker T=2$

۴) $\dim\ker T=3$

۵۰- فرض کنید ماتریس $A\in M_{10}(\mathbb{R})$ ، $A^2=A+2I$ و رتبه‌ی ماتریس $A+I$ برابر ۳ باشد. در این صورت $tr(A)$ برابر است با:

۱) -2

۲) -1

۳) ۱

۴) ۲

۵۱- فرض کنید $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا است و $A\in M_3(\mathbb{Q})$, $A^8=I$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A^7=I$

۲) $A^4=I$

۳) $A^3=I$

۴) $A^3=-I$

مبانی آنالیز ریاضی

۵۲- هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت و $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\limsup a_n\le\limsup\sigma_n$

۲) $\liminf a_n\le\liminf\sigma_n$

۳) $\liminf\sigma_n\le\liminf a_n$

۴) اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است.

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۵۳- تابع $f:[0,1]\to R$ با ضابطه:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\notin Q \\ m\sin\frac{1}{n} & x\in Q\ ,\ x=\frac{m}{n}\ ,\ (m,n)=1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود. کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $[0,1]$ پیوسته است.

۲) f در هر نقطه از بازهٔ $[0,1]$ حد دارد.

۳) تعداد نقاط پیوستگی f در $[0,1]$ شمارا است.

۴) ناپیوستگی‌های f در صورت وجود از نوع دوم است.

۵۴- کدام تابع بر $(0,\infty)$ یکنواخت پیوسته است؟

۱) x^2

۲) $x\sin x$

۳) $x\sin\frac{1}{x}$

۴) $\sin\frac{1}{x}$

۵۵- فرض کنیم $f:[a,b)\to R$ تابعی کراندار باشد و تابع $g:[a,b)\to R$ با ضابطهٔ $g(x)=\inf\limits_{a\le t\le x} f(t)$ تعریف شود. در این صورت:

۱) تابع g یکنواخت پیوسته است.

۲) تابع g پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.

۳) اگر تابع f یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع g نیز یکنواخت پیوسته است.

۴) اگر تابع f یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع g پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.

۵۶- فرض کنیم تابع غیر ثابت $f:[0,1]\to R$ مشتق‌پذیر باشد، f و f' صفر مشترک نداشته باشند و مجموعهٔ صفرهای f' ناتهی باشد. در این صورت مجموعهٔ صفرهای تابع f:

۱) تهی است.

۲) ناشمارا است.

۳) متناهی است.

۴) شمارای نامتناهی است.

۵۷- فرض کنیم تابع $f:[a,b]\to R$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a)<f'(b)$. کدام گزینه درست است؟

۱) مجموعهٔ $f'([a,b])$ فشرده است.

۲) مجموعهٔ $f'([a,b])$ یک بازه است.

۳) مجموعهٔ $f'([a,b])$ کراندار است.

۴) مجموعهٔ $\{x\in[a,b]: f'(a)\le f'(x)\le f'(b)\}$ یک بازه است.

www.isijournal.net

۵۸- فرض کنیم $f : R \to R$ پیوسته باشد. تساوی $f(0) = 0$ از کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x+n)dx = 0$

۲) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(\frac{x}{n})dx = 0$

۳) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f(x))^n dx = 0$

۴) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)dx = 0$

۵۹- فرض کنیم $A = \{x > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1)$ } همگرا است . در این صورت:

۱) $A = \{1\}$

۲) $A = (0, \infty)$

۳) $A = (0, 1]$

۴) $A = (\frac{1}{e}, e)$

۶۰- فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در R باشد و $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ a_n^-$ همگرا است.

۲) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ همگرا باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

۳) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ همگرا هستند.

۴) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ واگرا هستند.

۶۱- فرض کنیم A, B دو زیر مجموعه در R^n باشند و $A - B = \{a - b : a \in A , b \in B\}$ در این صورت:

۱) اگر $A - B$ همبند باشد حداقل یکی از A و B همبند است.

۲) اگر A و B همبند باشند آنگاه $A - B$ همبند است.

۳) اگر A و B بسته باشند آنگاه $A - B$ بسته است.

۴) اگر A فشرده و B بسته باشد آنگاه $A - B$ فشرده است.

www.isijournal.net

۶۲- فرض کنیم E و F دو زیر مجموعه ناتهی در R باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $(x,y)\in(E\times F)^\circ$ آنگاه $x\in E^\circ$ و $y\in F^\circ$.

۲) اگر $(x,y)\in(E\times F)'$ آنگاه $x\in E'$ و $y\in F'$.

۳) اگر $(E\times F)'\neq\emptyset$ آنگاه $E'\neq\emptyset$ و $F'\neq\emptyset$.

۴) اگر $E^\circ\cup F^\circ\neq\emptyset$ آنگاه $(E\times F)^\circ\neq\emptyset$.

۶۳- حداقل شرایط روی زیر مجموعه E از R که گزاره زیر راست باشد کدام است؟

برای هر دنباله نزولی و تودرتوی $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه‌های فشرده R، اگر $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \subseteq E$ آنگاه یک n وجود دارد که $K_n \subseteq E$.

۱) E بسته و لزوماً کراندار است.

۲) E بسته و نه لزوماً کراندار است.

۳) E باز و لزوماً کراندار است.

۴) E باز و نه لزوماً کراندار است.

مبانی آنالیز عددی

۶۴- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای اعداد حقیقی با روش بریدن برای ارقام غیر قابل نمایش در مبنای ۲، هر عدد $x\neq 0$ به صورت $\pm(0.d_1d_2d_3d_4)_2\times 2^{\pm d_5d_6}$ نمایش داده می‌شود که $1\le d_1\le 2$، $0\le d_i\le 2$، $i=2,\dots,6$، فاصله بین عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از ۷ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{9}$

۲) $\frac{1}{7}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{3}$

۶۵- در رابطه زیر گزینه صحیح برای نقطه چین کدام است؟

$$\frac{f(x+\frac{h}{2})-2f(x)+f(x-\frac{h}{2})}{\frac{h^2}{2}}+o(h^2)=\cdots$$

۱) $f'(x)$

۲) $f''(x+h)$

۳) $f''(x)$

۴) $f'(x+h)$

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۶۶- فرض کنید روش نیوتن برای حل مساله $\max(\sin x \cos x - 1)$ به یک عدد مثبت x^* همگرا شده است. نرخ همگرایی مجانبی برابر کدام است؟

۱) یک

۲) دو

۳) خطی

۴) زبرخطی

۶۷- مقدار d، تخمین مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $\bar{x} = ۱/۰۵$ با $d = \frac{y_۱ - y_۲}{۰/۰۵}$ که در آن، $y_۱ = \sqrt{۱/۰۵}$ و $y_۲ = ۱$، خطای برشی متناسب با ..... دارد.

۱) ۰/۰۰۰۱

۲) ۰/۰۰۱

۳) ۰/۰۱۵

۴) ۰/۱

۶۸- فرمول انتگرال گیری عددی $\int_۰^۱ f(\sqrt{x})dx \simeq w_۱f(۰) + w_۲f'(۰) + w_۳f(۱)$ برای چند جمله‌ای‌های تا درجه‌ی ۲ دقیق است. تقریب این فرمول برای $\int_۰^۱ \frac{dx}{۱+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) $\frac{۷}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$

۴) $\frac{۵}{۶}$

۶۹- تخمین $y(۰/۱)$ برای جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y(۰) = ۱$، $y'(x) = e^{x^۳}$ با استفاده از سری تیلور مرتبه ۳ (تا مشتق سوم) به ازای یک قدم $h = ۰/۱$ برابر کدام است؟

۱) ۱/۱۳

۲) ۱/۱۱۱

۳) ۱/۱۱

۴) ۱/۱

www.isijournal.net

مبانی احتمال

۷۰- داده‌های آماری با یک رقم اعشار با نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) زیر داده شده است.

۷	۱	۱	۲	۳	۳	۶	۷	۸
۸	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
۹	۲	۲	۳	۳				

داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟

۱) ۸/۱۱

۲) ۸/۱۶

۳) ۸/۲

۴) ۸/۳۴

۷۱- فرض کنید H ، G و $\bar{x}$ به ترتیب نمایانگر میانگین‌های همساز (هارمونیک، توافقی) ، هندسی و حسابی نمونه باشند. با فرض $x_i = ar^{i-1}$ ، $i = 1,\dots,n$ که در آن $r > 0$ و $a > 0$، کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $G^2 = \bar{x} \times H$

۲) $\bar{x}^2 = G \times H$

۳) $G = \frac{\bar{x} + H}{2}$

۴) $H^2 = \bar{x} \times G$

۷۲- در یک شرکت میانگین حقوق ماهیانه کارکنان مرد ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان، میانگین حقوق کارکنان زن ۷۰۰,۰۰۰ تومان و میانگین حقوق کلیه کارکنان ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان است، چند درصد کارکنان زن هستند؟

۱) ٪۳۰

۲) ٪۴۰

۳) ٪۵۰

۴) ٪۶۰

۷۳- سه جعبه با برچسب‌های ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومان مشخص شده‌اند، به چند طریق می‌توان این سه جعبه را با سکه‌های مناسب فوق پر کرد تا ارزش مجموع سه جعبه ۲۰۰۰ تومان باشد؟

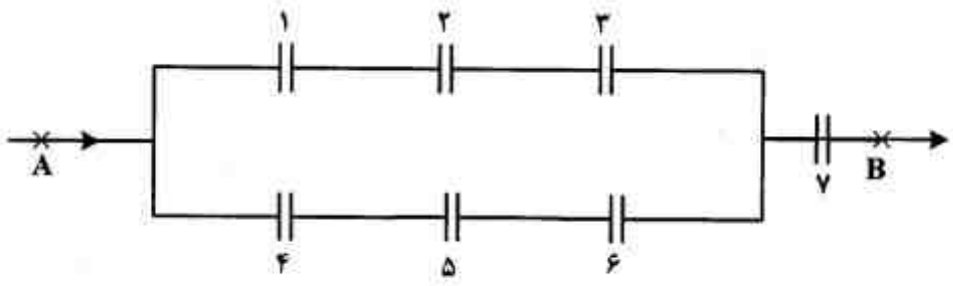
۱) ۷۰۳

۲) ۷۱۶

۳) ۸۲۰

۴) ۸۶۱

۷۴- در شکل زیر فرض کنید احتمال این که هر کدام از ۷ رله‌ی شبکه ارتباطی نشان داده شده درست کار کنند برابر p است. در صورتیکه رله‌ها مستقل از یکدیگر کار کنند، احتمال این که بتوان بین دو نقطه A و B ارتباط برقرار کرد کدام است؟



۱) $p^4(2-p^3)$

۲) $p^3(2-p^3)$

۳) $p^4(1-p^3)$

۴) $p^3(1-p^3)$

www.isijournal.net

۷۵- فردی سه سکه در جیب دارد که یکی سالم و دو تای دیگر هر دو طرف شیر هستند. اگر این فرد یک سکه به تصادف از جیب خود خارج و ۲ بار پرتاب کند و هر دو بار شیر مشاهده شود، احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$

۲) $\frac{۴}{۵}$

۳) $\frac{۱}{۵}$

۴) $\frac{۱}{۹}$

دروس تخصصی:

آنالیز ریاضی

۷۶- کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{[nx]}{n(n+۱)^{\alpha}}$ درست است؟ ($[t]$ جزء صحیح t است.)

۱) به ازای هر $\alpha > ۱$ این سری بر $[a,+\infty)$ همگرا است ولی یکنواخت همگرا نیست.

۲) به ازای هر $\alpha > ۱$ این سری بر $[a,b]$ همگرا است ولی یکنواخت همگرا نیست.

۳) به ازای هر $۰ < \alpha < ۱$ این سری بر $[a,b]$ همگرا است ولی یکنواخت همگرا نیست.

۴) به ازای هر $\alpha > ۱$ این سری بر $[a,+\infty)$ همگرا نیست.

۷۷- فرض کنیم $d_۱$ و $d_۲$ دومتریک روی مجموعهٔ X باشند به طوری‌که برای هر $x,y \in X$ $d_۱(x,y) \le d_۲(x,y)$. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $A \subseteq (X,d_۱)$ باز باشد آنگاه $A \subseteq (X,d_۲)$ نیز باز است.

۲) اگر $A \subseteq (X,d_۲)$ بسته باشد آنگاه $A \subseteq (X,d_۱)$ نیز بسته است.

۳) اگر $A \subseteq (X,d_۱)$ فشرده باشد آنگاه $A \subseteq (X,d_۲)$ نیز فشرده است.

۴) اگر $A \subseteq (X,d_۲)$ ناهمبند باشد آنگاه $A \subseteq (X,d_۱)$ نیز ناهمبند است.

۷۸- فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌ای یکنواخت کراندار از توابع انتگرال‌پذیر روی $[a,b]$ باشد و $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad (x \in [a,b])$. در این صورت:

۱) $\{F_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای همگرای نقطه‌ای است، اما دارای هیچ زیر دنباله همگرای یکنواخت بر $[a,b]$ نیست.

۲) $\{F_n\}$ دارای زیر دنباله‌ای همگرای یکنواخت بر $[a,b]$ است.

۳) اگر $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا بر $[a,b]$ باشد آنگاه $\{f_n\}$ نیز بر $[a,b]$ یکنواخت همگرا است.

۴) اگر $\{F_n\}$ نقطه‌ای همگرا باشد آنگاه $\{f_n\}$ نیز نقطه‌ای همگرا است.

www.isijournal.net

۷۹- فرض کنیم E مجموعه‌ای در فضای متریک X باشد که E و $X\setminus E$ هر دو در X چگال باشند. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

۱) $E^\circ = \phi$

۲) $E' = X$

۳) $(E')' = E'$

۴) E' ناشمارا است.

۸۰- فرض کنید d_1 و d_2 دو متریک روی X باشند به‌طوری که فضاهای متریک (X,d_1) و (X,d_2) زیر مجموعه‌های فشرده یکسان داشته باشند. در این صورت:

۱) فضاهای (X,d_1) و (X,d_2) زیر مجموعه‌های بسته و کراندار یکسان دارند.

۲) فضاهای (X,d_1) و (X,d_2) زیر مجموعه‌های بی‌کران یکسان دارند.

۳) هر دنباله همگرا در (X,d_1) دارای زیر دنباله‌ای همگرا در (X,d_2) است.

۴) فضاهای (X,d_1) و (X,d_2) زیر مجموعه‌های باز و کراندار یکسان دارند.

۸۱- مجموعه اعداد حقیقی را با متریک d که با ضابطهٔ $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ تعریف شده است در نظر بگیرید. در این صورت همسایگی به مرکز صفر و شعاع ... .

۱) $\frac{1}{2}$ در $(\mathbb{R},d)$ برابر است با بازهٔ $(-2,2)$.

۲) ۲ در $(\mathbb{R},d)$ برابر است با بازهٔ $(-1,1)$.

۳) ۲ در $(\mathbb{R},d)$ برابر است با بازهٔ $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$.

۴) $\frac{1}{2}$ در $(\mathbb{R},d)$ برابر است با بازهٔ $(-1,1)$.

۸۲- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر $A \subseteq \mathbb{R}^n$ همبند باشد، آنگاه $\bar{A}$ نیز همبند است.

۲) اگر $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ و A همبند باشد، آنگاه B نیز همبند است.

۳) اگر $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ و مجموعه‌های A_1 و A_2 همبند باشند، آنگاه B نیز همبند است.

۴) اگر x نقطه انباشتگی A باشد و A همبند باشد، آنگاه $A\cup\{x\}$ نیز همبند است.

۸۳- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک با بیش از یک عضو باشد که به ازای $x\in X$ و $r>0$ ، بستار مجموعهٔ $\{y\in X : d(x,y)<r\}$ برابر با $\{y\in X : d(x,y)\le r\}$ است. کدام گزینه درست است؟

۱) X نقطه تنها ندارد اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در X همگرا باشد.

۲) X می‌تواند بیش از یک نقطه تنها داشته باشد.

۳) X دقیقاً یک نقطه تنها دارد.

۴) X نقطه تنها ندارد.

۸۴- فرض کنیم $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد. کدام گزینه نادرست است؟ (A° یعنی درون مجموعه A)

۱) اگر f مشتق‌پذیر و $f'([a,b])$ حداکثر شمارا باشد آنگاه f یک چندجمله‌ای است.

۲) اگر f مشتق‌پذیر و $(f'([a,b]))^\circ = \phi$ آنگاه f ثابت است.

۳) اگر $f([a,b])$ حداکثر شمارا باشد آنگاه f مشتق‌پذیر است.

۴) اگر $(f([a,b]))^\circ = \phi$ ، آنگاه f مشتق‌پذیر است.

www.isijournal.net

۸۵- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک است به طوری که هر تابع دلخواه $f:X\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) X کراندار است.

۲) هر زیر مجموعه X، بسته است.

۳) هر زیر مجموعه بسته و کراندار X فشرده است.

۴) هر سه مورد

۸۶- دنباله توابع $f_n(x)=\sqrt{n+1}\cos x\sin^n x$ بر $\mathbb{R}$،

۱) همگرا نیست.

۲) به طور نقطه‌ای به تابع صفر همگرا است ولی به‌طور یکنواخت همگرا نیست.

۳) به طور یکنواخت همگرا است.

۴) به طور نقطه‌ای به تابعی ناصفر همگرا است ولی به‌طور یکنواخت همگرا نیست.

۸۷- دنباله توابع $f_n(x)=\begin{cases}\cos x+(\sin x)^n(\frac{1}{n}-\sin x)^n & x\in[0,\frac{\pi}{2n})\\ \cos x+\frac{(-1)^n}{n^2+1} & x\in[\frac{\pi}{2n},1]\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$، کدام است؟

۱) همگرای یکنواخت است.

۲) همگرای نقطه‌ای نیست.

۳) همگرای نقطه‌ای است ولی همگرای یکنواخت نیست.

۴) فقط و فقط زیر دنباله‌های زوج و فرد همگرای یکنواخت هستند.

۸۸- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد به‌طوری که برای هر گردایه دلخواه $\{A_i\}_{i\in I}$ از زیر مجموعه‌های X داشته باشیم $(\cup_{i\in I}A_i)'=\cup_{i\in I}A_i'$. کدام گزینه درست است؟

۱) فضای متریک X، کراندار است.

۲) فضای متریک X، همبند است.

۳) فضای متریک X، فشرده است.

۴) هر زیر مجموعهٔ دلخواه X، باز است.

۸۹- فرض کنیم $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشد و برای هر $x\in[a,b]$، $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)dt$. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\{f_n\}$ بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\{f_n'\}$ نیز همگرای یکنواخت است.

۲) اگر $\{f_n'\}$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\{f_n\}$ نیز همگرای یکنواخت است.

۳) اگر $\{f_n'\}$ بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\{f_n-f_n(0)\}$ نیز همگرای یکنواخت است.

۴) اگر $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[a,b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه $\{f_n\}$ نیز همگرای یکنواخت است.

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۹۰- حد دنبالهٔ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$ ... برابر است

۱) برابر $+\infty$

۲) موجود و برابر $\frac{\pi}{4}$ است

۳) موجود و برابر $\frac{\pi^2}{6}$ است

۴) موجود برابر ۱ است

مبانی ترکیبیات

۹۱- در چند جایگشت از حروف a و b و c و d و e دو حرف a و b مجاور نیستند؟

۱) ۲۴

۲) ۳۶

۳) ۴۸

۴) ۷۲

۹۲- کدام‌یک از تساوی‌های زیر نادرست است؟

۱) $\binom{20}{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}^2$

۲) $10\binom{100}{9} = 100\binom{99}{8}$

۳) $\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4}$

۴) $\binom{30}{5} = \sum_{k=0}^{5} \binom{20}{5-k}\binom{10}{k}$

۹۳- تعداد دنباله‌های به طول ۷ از اعداد ۰ و ۱، که یا دو تای اول آنها یا ۳ تای آخر آنها ۱ است برابر کدام‌یک است؟

۱) ۴۰

۲) ۴۴

۳) ۴۸

۴) ۶۴

۹۴- به چند طریق می‌توان رشته های ۱۰ تایی از صفر و یک ساخت که هیچ دو یکی کنار هم نباشند؟

۱) ۱۴۲

۲) ۱۴۳

۳) ۱۴۴

۴) ۱۴۵

www.isijournal.net

۹۵- به چند طریق می‌توان ۱۰ کتاب متفاوت را در ۴ طبقه کتابخانه قرار داد؟ (می‌توان برخی طبقات را خالی گذاشت همچنین ترتیب کتاب‌ها در هر طبقه اهمیت دارد.)

۱) $\frac{۱۳!}{۳!}$

۲) $(۱۰)^۴$

۳) $۴^{۱۰}$

۴) $\frac{۱۳!}{۳!۱۰!}$

۹۶- ضریب عبارت $(xyz)^{۱۲}$ در بسط $(۲x^۴+y^۳+x^۲z^۶)^۸$ کدام است؟

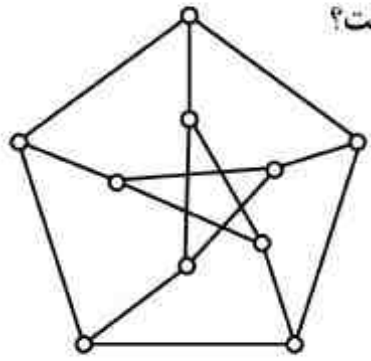
۱) ۴۲۰

۲) ۴۸۰

۳) ۸۴۰

۴) ۱۶۸۰

۹۷- فرض کنید k مینیمم تعداد رنگی باشد که می‌توان رئوس گراف پترسن را رنگ آمیزی کرد با این ویژگی که هر رأس و همسایه‌هایش ۴ رنگ متفاوت داشته باشند. k برابر کدام است؟



۱) ۲

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

۹۸- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) هر گراف ۴ ـ منتظم همبند فاقد یال برشی است.

۲) یک گراف با ۵ مولفه همبندی که همهٔ مولفه‌های آن درخت می‌باشند و ۱۰۰ رأسی است ۹۹ یال دارد.

۳) هر گراف همبند ۳ـ منتظم فاقد یال برشی است.

۴) درختی موجود است، که با حذف یک یال از آن سه مؤلفهٔ همبندی پدید آید.

۹۹- کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

۱) دقیقاً، ۶ گراف ۹ رأسی ۶ منتظم دو به دو غیر یکریخت وجود دارد.

۲) هیچ گراف ۱۰ رأسی دو بخشی ۴ منتظم نداریم.

۳) هر گراف ۹ رأسی ۴ منتظم همبند است.

۴) هر گراف ۱۰ رأسی ۴ منتظم همبند است.

۱۰۰- فرض کنید G گرافی ۷ ـ منتظم و جهتدار باشد به‌طوری که درجهٔ خروجی هر رأس آن ۱ یا ۴ است. اگر a و b به ترتیب تعداد رئوس با خروجی‌های ۱ و ۴ باشند در این صورت $\frac{b}{a}$ برابر کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

www.isijournal.net

۱۰۱- در یک مهمانی قرار است از ۸ مهمان حاضر عکس یادگاری گرفته شود. اگر حاضرین به صورت خطی قرار گیرند و از بین این ۸ نفر سه نفر A و B و C باشند که از این سه نفر هیچ دوتایی حاضر نباشد کنار هم قرار بگیرند به چند طریق می‌توان عکس یادگاری گرفت؟

۱) $۲۰\times۶!$

۲) $۳۵\times۶!$

۳) $۴۱\times۶!$

۴) $۵۵\times۶!$

۱۰۲- با ارقام ۱ تا ۶ چند عدد شش رقمی با رقم‌های متمایز می‌توان ساخت که مجموع رقم‌های اول و ششم و مجموع رقم‌های دوم و پنجم با هم برابر باشد؟

۱) ۶×۲^{۳}

۲) ۷×۲^{۴}

۳) ۷×۲^{۳}

۴) ۶×۲^{۴}

۱۰۳- کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

۱) درختی با ماکزیمم درجه ۱۰ وجود دارد که دقیقاً ۹ تا رأس درجهٔ ۱ دارد.

۲) درختی وجود دارد که مسطح نیست.

۳) درختی وجود دارد که دو تطابق کامل دارد.

۴) هر درخت حداکثر یک تطابق کامل دارد.

۱۰۴- به چند طریق می‌توان $\{۱,۲,\ldots,۴۰\}$ را به ۵ زیر مجموعه افراز نمود، که ۱ و ۱۰ و ۲۰و۳۰ و ۳۵ کوچکترین عضو این زیرمجموعه‌ها باشند؟

۱) $۲^{۱۶}\times۳^{۱۰}\times۵^{۵}$

۲) $۲^{۱۷}\times۳^{۹}\times۵^{۵}$

۳) ۱

۴) $۲^{۱۸}\times۳^{۱۰}\times۵^{۶}$

۱۰۵- تعداد مسیرهای ۴ رأسی در یک گراف ۳ ـ منتظم دو بخشی ۱۰ رأسی برابر کدام است؟

۱) ۲۰

۲) ۴۰

۳) ۶۰

۴) ۱۰۰

www.isijournal.net

مبانی جبر

۱۰۶- فرض کنید R_1 و R_2 دو حلقه جابجایی باشند، کدام گزاره صحیح است؟

۱) اگر P_1 ایده‌آلی اول در R_1 باشد آنگاه $P_1 \times R_2$ ایده‌آلی اول در $R_1 \times R_2$ است.

۲) اگر P_1 ایده‌آلی ماکسیمال در R_1 باشد $P_1 \times \{0\}$ ایده‌آلی اول در $R_1 \times R_2$ است.

۳) اگر P_1 ایده‌آلی اول در R_1 باشد $P_1 \times \{0\}$ ایده‌آلی اول در $R_1 \times R_2$ است.

۴) اگر P_1 و P_2 ایده‌آل‌های اول در R_1 و R_2 باشند آنگاه $P_1 \times P_2$ ایده‌آلی اول در $R_1 \times R_2$ است.

۱۰۷- فرض کنید $(\mathbb{N}, *)$ مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل $*$ است که برای هر a و b در $\mathbb{N}$ داریم، $a * b = \max\{a, b\}$. کدام گزاره صحیح است؟

۱) $(\mathbb{N}, *)$ غیرآبلی است.

۲) $(\mathbb{N}, *)$ شرکت‌پذیر نمی‌باشد.

۳) $(\mathbb{N}, *)$ یک تکواره (منوئید) است.

۴) هر عضو $(\mathbb{N}, *)$ عضو وارون دارد.

۱۰۸- کدام گزاره صحیح است؟

۱) گروه‌های $(\mathbb{Q}, +)$ و $(\mathbb{Z}, +)$ یکریخت‌اند.

۲) گروه‌های $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R} - \{0\}, \times)$ یکریخت‌اند.

۳) گروه‌های $\left(\frac{(\mathbb{Q})}{(\mathbb{Z})}, +\right)$ و $(\mathbb{Z}, +)$ یکریخت‌اند.

۴) گروه‌های $(\mathbb{R}, +)$ و $(\mathbb{R}^+, \times)$ یکریخت‌اند، که در آن $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

۱۰۹- تعداد جواب‌های معادله‌ی $x^2 = 0$ در حلقه‌ی $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_{p^3} \times \mathbb{Z}_{p^5}$ (p اول است)، کدام است؟

۱) p^3

۲) p^5

۳) p^6

۴) p^8

۱۱۰- اگر F یک میدان از مشخصه $p > 0$ بوده و نگاشت $\theta : F \to F$ با ضابطه $\theta(x) = x^p$ باشد، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) θ یک به یک است.

۲) θ پوشاست.

۳) θ یک همریختی حلقه‌ای است.

۴) θ همانی است اگر و تنها اگر F یک میدان p عضوی می‌باشد.

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۱۱۱- فرض کنید G یک گروه بوده و H زیر گروه G و $x \in G$ و $G = Hx^{-1}Hx$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $G = H$

۲) $H \cap x^{-1}Hx = 1$

۳) $H \cap x^{-1}Hx$ آبلی است.

۴) اگر H آبلی باشد آنگاه G آبلی است.

۱۱۲- اگر D_8 گروه تقارن‌های مربع و Q_8 گروه کواترنیونهای هشت عضوی باشند در این صورت در کدام گزینه مشتق گروه با بقیه فرق دارد؟

۱) $\mathbb{Z}_4 \times Q_8$

۲) $\mathbb{Z}_2 \times D_8$

۳) $\mathbb{Z}_4 \times S_3$

۴) $\mathbb{Z}_{12} \times D_8$

۱۱۳- در مورد گروه G کدام گزینه درست است؟

۱) $< g^2 \mid g \in G >$ زیر گروهی نرمال و مخالف G است.

۲) مجموعه تمام عناصر G که از مرتبه متناهی‌اند، زیر گروهی از G است.

۳) مجموعه تمام عناصر به صورت $a^{-1}b^{-1}ab$ در گروه G زیر گروهی از G است.

۴) تمام عناصر که در یک گروه G کلاس تزویجی آنها متناهی است تشکیل یک زیر گروه از G می‌دهند.

۱۱۴- فرض کنید G یک گروه بوده و $|G'| = 100$ و $a \in G$ در این صورت در مورد تعداد اعضای رده تزویجی a چه می‌توان گفت؟

۱) کمتر از ۱۰۰

۲) ۱۰۰

۳) بیشتر از ۱۰۰

۴) درباره تعداد اعضای رده تزویجی a چیزی نمی‌توان گفت.

۱۱۵- فرض کنید G_1 گروهی از مرتبه ۲۴ و گروهی از مرتبه ۳۰ است. فرض کنید $f : G_1 \to G_2$ یک همریختی باشد که تصویر آن گروهی غیر آبلی است. در این صورت داریم:

۱) $\ker f \cong S_3$

۲) $\mathrm{Im} f \cong S_3$

۳) $\ker f \cong \mathbb{Z}_4$

۴) $\mathrm{Im} f \cong D_{10}$ (گروه دو وجهی از مرتبه ۱۰)

۱۱۶- فرض کنید G یک گروه متناهی است با n کلاس تزویج. در این صورت تعداد $(a,b) \in G \times G$ با شرط $ab = ba$ چند است؟

۱) $|G|$

۲) $n|G|^2$

۳) $n|G|$

۴) n^2

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۱۱۷- کدام مجموعه همراه با عمل داده شده تشکیل یک گروه می‌دهد؟

۱) $(\mathbb{R},\times)$

۲) $(Q,*)$ و $a*b=\frac{a}{5}$

۳) $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z},*)$ ، $(a,b)*(c,d)=(ad+bc,bd)$

۴) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x<1\}$ و $x*y=x+y-[x+y]$ ، که در آن $[z]$ جزء صحیح z است.

۱۱۸- فرض کنید R حلقه جابجایی ویکدار و M ایده‌آلی ماکسیمال در R باشد. چنانچه (مجموعهٔ ماتریس‌ها $n\times n$ با درایه‌های M را با $M_n(M)$ نمایش دهیم کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

۱) $M[x]$ ایده‌آلی اول در $R[x]$ است.

۲) $\frac{M_n(R)}{M_n(M)}$ میدان است.

۳) $M[x]$ ایده‌آل ماکسیمال در $R[x]$ نمی‌باشد.

۴) $M_n[M]$ ایده‌آل ماکسیمال در $M_n[R]$ است.

۱۱۹- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی ویکدار بوده و دارای سه ایده‌آل ماکسیمال متمایز m_1, m_2, m_3 باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $m_1^2+m_2^2=R$

۲) $m_1 m_2+m_3=R$

۳) $m_1 m_2+m_1^2 m_3=R$

۴) $m_1 m_2=m_1\cap m_2$

۱۲۰- فرض کنید G یک گروه ساده متناهی باشد که دارای زیر گروه‌های H و K است و $|G:K|$ و $|G:H|$ اعداد اول می‌باشند. کدامیک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) $(|K|,|H|)=1$

۲) $|H|=|K|$

۳) $|H|+|K|>|G|$

۴) $|H|\ge 2|K|$ یا $|K|\ge 2|H|$

www.isijournal.net

www.isijournal.net

بهینه‌سازی خطی

۱۲۱- مساله (P) را به صورت

$$\min z = c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b \qquad (P)$$
$$L \le x \le U$$

در نظر بگیرید که در آن، $L \le U$ و L و U درایه های متناهی دارند. گزینه صحیح کدام است؟

۱) (P) جواب بهینه دارد.
۲) (P) می‌تواند نامتناهی (بی‌کران) باشد.
۳) دو گان (P) نمی‌تواند نامتناهی(بی‌کران) باشد.
۴) دوگان (P) جواب بهینه دارد، اگر (P) جواب شدنی داشته باشد.

۱۲۲- مقادیر بهینه دو مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را به ترتیب با z_1 و z_2 نشان می‌دهیم:

$$z_1 = \min\{c^T x : Ax = b,\ x \ge 0\}$$
$$z_2 = \min\{c^T x : Ax \ge b,\ x \ge 0\}$$

گزینه درست کدام است؟

۱) $z_2 \le z_1$.
۲) $z_2 \ge z_1$.
۳) $z_2 < z_1$.
۴) $z_2 > z_1$.

۱۲۳- فرض کنید به ازای هر x، جواب دستگاه $Ax \le 0$، داریم $c^T x \le 0$. در این صورت، دستگاه ... .

۱) $A^T V = c$، $V \le 0$ جواب ندارد
۲) $A^T V = c$، $V \ge 0$ جواب ندارد
۳) $A^T V = c$، $V \ge 0$ جواب دارد
۴) $A^T V = c$، $V \le 0$ جواب دارد

۱۲۴- اگر A، $m \times n$ و $m =$ رتبه (A)، آنگاه گزینه درست برای مساله $\min z = c^T x$ s.t. $Ax = b$ کدام است؟

۱) نمی‌تواند نامتناهی باشد.
۲) یا جواب بهینه دارد یا نامتناهی (بی‌کران) است.
۳) جواب‌های بهینه چندگانه دارد.
۴) می‌تواند ناشدنی باشد.

www.isijournal.net

۱۲۵- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر متغیری وارد پایه شود، در تکرار بعدی سیمپلکس ممکن است از پایه خارج شود.

۲) اگر متغیری از پایه خارج شود، در تکرار بعدی سیمپلکس نمی‌تواند وارد پایه شود.

۳) اگر در جدول بهینه، $z_j - c_j$ ها برای همه متغیرهای غیر پایه‌ای منفی باشند، آنگاه جواب بهینه یکتاست.

۴) اگر مساله‌ای جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آنگاه بردار گرادیان تابع هدف با بردار گرادیان یکی از محدودیت‌ها موازی است.

۱۲۶- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 8$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

جدول زیر، جدول بهینه این مسأله است. جواب بهینه وقتی که ضریب x_2 در تابع هدف از ۳ به ۴- تغییر کند، کدام است؟

(x_4, x_5 متغیرهای کمکی یا لنگی مسأله هستند.)

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	۱	۱	۰	۱	۳	۰	۲۴
x_2	۰	۱	۱	۲	۱	۰	۸
x_5	۰	۲	۰	۳	۱	۱	۱۲

۱) $x_3 = 4 \ , \ x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 0$

۲) $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \ , \ x_4 = x_5 = 2$

۳) $x_5 = x_1 = x_2 = 0 \ , \ x_3 = 4 \ , \ x_4 = 3$

۴) $x_1 = x_4 = x_5 = 0 \ , \ x_3 = x_2 = 2$

۱۲۷- مساله برنامه‌ریزی خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$z^* = \min 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + 6\lambda_4 - 7\lambda_5$$
$$\text{s.t.} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$$
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_5 \ge 0$$

کدام گزینه برای این مساله صحیح است؟

۱) $\lambda_5^* = 0$.

۲) $\lambda_4^* = 0$.

۳) همواره بی‌کران است ($z^* = -\infty$).

۴) جواب بهینه دارد و در همه جواب‌های بهینه، $\lambda_3^* = 0$.

www.isijournal.net

۱۲۸- جدول حمل و نقل زیر را درنظر بگیرید. می‌خواهیم با روش تقریب **vogell** یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین بدست آوریم. اولین متغیری که تخصیص به آن صورت می‌گیرد (یعنی مقدار دهی می‌شود) کدام است؟

	۱	۲	۳	
۱	۱	۲	۴	۸۰
۲	۱	۳	۵	۳۰
۳	۷	۵	۲	۹۰
	۱۰۰	۴۵	۵۵	

۱) $x_{۱۲}$.

۲) $x_{۱۱}$.

۳) $x_{۲۱}$.

۴) $x_{۳۳}$.

۱۲۹- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای سیمپلکس برای حل یک مساله مینیمم سازی است. قیدها از نوع $\geq$ و $s_۳, s_۲, s_۱$ متغیرهای کمکی هستند.

	Z	$x_۱$	$x_۲$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	RHS
Z	۱	۰	u	۰	k	۰	f
$x_۱$	۰	۱	−۲	۰	۲	۰	β
$s_۱$	۰	۰	−۱	۱	۲	۰	d
$s_۳$	۰	۰	h	۰	۳	۱	e

مقدار f برابر است با ... .

۱) $k\beta$

۲) $\frac{۱}{۲}k\beta$

۳) $\frac{۱}{۲}kd$

۴) kd

۱۳۰- مساله (P) را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\min \ z = c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b \quad (P)$$
$$x \geq ۰$$

که درآن، A ، $n \times n$، $A = A^T$ و $b = c$. دوگان مساله (P) را (D) بگیرید. گزینه صحیح کدام است؟

۱) اگر (D) ناشدنی باشد، آنگاه (P) نامتناهی(بی‌کران) است.

۲) (P) جواب بهینه دارد اگر و تنها اگر (D) شدنی باشد.

۳) اگر (D) ناشدنی باشد، آن‌گاه (P) ناشدنی است.

۴) اگر (P) ناشدنی باشد، آنگاه (D) نامتناهی است.

www.isijournal.net

www.isijournal.net

۱۳۱- مساله‌ی (P) را به صورت

$$\min w = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$\text{s.t. } Ax + y = b \quad (P)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

در نظر بگیرید که برای تعیین شدنی بودن دستگاه $Ax = b\ ,\ x \geq 0$ ، ساخته شده است. فرض کنید در یک جدول سیمپلکس برا ی(P) در سطر متناظر با y_iمربوط به دستگاه $Ax + y = b$، درایه‌های متناظر با x همگی برابرند با صفر. در این صورت، گزینه درست کدام است؟

۱) سطر iام A به بقیه سطرهای A وابسته است.

۲) سطر iام A را می‌توان از جدول حذف کرد و الگوریتم ادامه می‌یابد.

۳) y_iو ستون مربوط به آن را می‌توان از جدول حذف کرد.

۴) دستگاه $Ax = b\ ,\ x \geq 0$ نمی‌تواند جواب بی‌کران داشته باشد.

۱۳۲- اگر یک مساله برنامه‌ریزی خطی جواب بهینه داشته باشد و b_i، یکی از درایه‌های بردار طرف راست دستگاه قیود، به یک مقدار جدید $\hat{b}_i$ تغییر داده شود، آن‌گاه دوگان مساله جدید ...

۱) می‌تواند ناشدنی باشد.

۲) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

۳) یا ناشدنی است یا بی‌کران (نامتناهی) است.

۴) می‌تواند بی‌کران (نامتناهی) باشد.

۱۳۳- مساله‌های اولیه (P) و دوگان آن، (D) ، را درنظر بگیرید:

$$\min z = c^T x \qquad \max u = b^T y$$
$$\text{s.t } Ax = b \quad (P) \qquad \text{s.t. } A^T y + s = c \quad (D)$$
$$x \geq 0 \qquad s \geq 0$$

مجموعه‌های F و F^+ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F = \left\{(x,y,s) \mid Ax = b,\ A^T y + s = c,\ x \geq 0,\ s \geq 0\right\}$$
$$F^+ = \left\{(x,y,s) \mid Ax = b,\ A^T y + s = c,\ x > 0,\ s > 0\right\}$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $F \cup F^+ \neq \phi$، آن‌گاه (P) یا (D) می‌تواند بی‌کران باشد.

۲) اگر $F \cap F^+ \neq \phi$، آن‌گاه (P) و (D) جواب‌های بهینه دارند.

۳) اگر $F = \phi$، آن‌گاه (P) و (D) جواب‌های بهینه دارند.

۴) اگر $F = \phi$، آن‌گاه (P) یا (D) بی‌کران است.

www.isijournal.net

۱۳۴- فرض کنید مساله برنامه‌ریزی خطی (P) جواب بهینه دارد. قید جدیدی به صورت $a^T x = b_\circ$ به مساله اضافه کنید و مساله جدید را (P′) بنامید. مساله (P′) ... .

۱) جواب بهینه دارد

۲) نمی‌تواند ناشدنی باشد

۳) می‌تواند نامتناهی باشد

۴) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد

۱۳۵- مجموعه $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را مخروط می‌نامیم هرگاه $\lambda d \in D$ برای هر $\lambda \geq \circ$ و هر $d \in D$. گزینه نادرست کدام است؟

۱) اگر C یک مخروط محدب باشد، آن‌گاه C حداقل یک نقطه رأسی دارد.

۲) هر مخروط $D \neq \{\circ\}$ مجموعه‌ای بی‌کران است.

۳) اگر D یک مخروط باز باشد آنگاه مسأله $\min C^T x$ که $x \in D$ ، $C \neq \circ$، جواب بهینه ندارد.

۴) C مخروط محدب است اگر و تنها اگر $x, y \in C$ نتیجه دهد $\lambda x + \mu y \in C$، به ازای هر $\lambda \geq \circ$ و $\mu \geq \circ$.

www.isijournal.net

www.isijournal.net

www.isijournal.net

www.isijournal.net

www.isijournal.net

www.isijournal.net

www.isijournal.net