636F

636

F

نام

نام خانوادگی

محل امضاء

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

عصر جمعه
۹۳/۱۱/۱۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل ـ سال ۱۳۹۴

مجموعه آمار ـ کد ۱۲۰۷

تعداد سؤال: ۱۳۵ — مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

بهمن ماه ـ سال ۱۳۹۳

زبان عمومی و تخصصی:

PART A: Vocabulary

Directions: *Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark your answer sheet.*

1- Your new spokesperson is very --------- and clearly comfortable speaking in front of large audiences.
1) impatient 2) willful 3) voluble 4) modish

2- That ring is made from an --------- of minerals; if it were pure gold it would never hold its shape.
1) occurrence 2) elaboration 3) intervention 4) amalgam

3- Fortunately, the parliament --------- the new law that would prohibit companies from discriminating according to race in their hiring practices.
1) abridged 2) ratified 3) magnified 4) persuaded

4- The teacher did not appreciate the student's --------- and gave him detention.
1) sarcasm 2) advent 3) blunder 4) reverie

5- The police have not yet been able to find the missing child; to all of the searchers, the child's location is still a great ---------.
1) fallacy 2) enigma 3) remorse 4) sympathy

6. I really feel sad to say that we are now witnessing environmental destruction on an --------- scale.
1) implicit 2) inadvertent 3) articulated 4) unprecedented

7- Ted was severely --------- by his colleagues for his use of offensive language when addressing the guests.
1) deviated 2) castigated 3) resigned 4) hardened

8- As shrinking military budgets add to economic woes, arms manufacturers are --------- seeking to expand their markets.
1) nocturnally 2) equivocally 3) indecisively 4) aggressively

9- Much to my ---------, I should confess that we don't have a good indication that women are actually taking better care of themselves today.
1) indifference 2) verification 3) chagrin 4) jubilance

10- It is to be remembered that living in a --------- country is no guarantee you will necessarily live a long life.
1) prosperous 2) conceptual 3) conceivable 4) long-winded

PART B: Cloze Passage

Directions: *Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark your answer sheet.*

The human question is the big one. (11) --------- on humans are very thin. Most human populations that are forced to survive on low-calorie diets are also malnourished and are as likely (12) --------- from vitamin and mineral deficiencies. (13) --------- is on the Japanese island of Okinawa, Walford notes: "The Okinawans have about (14) --------- the calorie intake of the rest of Japan. They eat mainly fish and vegetables. They have as much as 40 times the incidence of people (15) --------- 100. They have less diabetes, tumors and so forth than the rest of Japan."

11- 1) The data exist 2) The data whose existence
3) Existing data that are 4) The existing data

12- 1) not to die as prematurely 2) as not to die prematurely
3) so not to prematurely die 4) not to die prematurely as

13- 1) Only one exception to know 2) The only exception to know
3) The only known exception 4) One exception is only known

14- 1) 70 percent of
2) a percentage of 70
3) 70 percent
4) 70 of the percentage

15- 1) in
2) for
3) over
4) with

PART C: Reading Comprehension

Directions: ***Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4) and then mark the correct choice on your answer sheet.***

PASSAGE 1:

In probability theory, the expected value of a random variable is intuitively the long-run average value of repetitions of the experiments it represents. Less roughly, the law of large numbers guarantees that the arithmetic mean of the values almost surely converges to the expected value as the number of repetitions goes to infinity. More practically, the expected value of a discrete random variable is the probability weighted average of all possible values. In other words, each possible value a random variable can assume is multiplied by its probability of occurring, and the resulting products are summed to obtain the expected value. The same works for continuous random variable, except the sum is replaced by an integral and the probabilities by probability densities. For distributions which are neither discrete nor continuous, the expected value of a random variable is the integral of the random variable with respect to its probability measure.

16- The expected value of a discrete random variable is the ------------------.
1) arithmetic mean
2) average
3) integral of random variable
4) sum of the production of random variable values by its probability

17- Which kind of convergence is considered for the law of large numbers?
1) Arithmetic mean
2) Almost surely convergence
3) Convergence in mean
4) Expected value

18- For a probability density, the expected value of the related random variable is the -----------------.
1) probability-weighted average
2) integral of random variable with respect to the probability measure
3) average of all possible values
4) continuous random variable

19- Based on the law of large numbers the ---------------- converges to the expected value.
1) harmonic mean
2) median
3) arithmetic mean
4) geometric mean

20- The expected value for distributions which are neither discrete nor continuous is ----------------.
1) integral of random variable with respect to its probability measure
2) sum of probabilities produce by its values
3) integral of the random variable multiplied by probability measure
4) a measure

PASSAGE 2:

We define sample mean $\bar{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n} X_i$ and sample variance $S^2 = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, where $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ comprises a random sample from some population. It is well known that $\bar{X}$ and S^2 are independent if the population is normally distributed. Now, naturally we can ask a question: Are $\bar{X}$ and S^2 independent without the assumption of normality? The answer to this question is "No" according to the following theorem found in Lukacs (1942).

Theorem: If the variance (or second moment) of a population distribution exists, then a necessary and sufficient condition for the normality of the population distribution is that $\bar{X}$ and S^2 are mutually independent.

Remark: That the normality is a necessary condition for the independence between $\bar{X}$ and S^2 was first proved by Geary (1936) using a mathematical tool provided by R. A. Fisher, but the proof in Lukacs (1942) is easier to understand.

21- What comprises a random sample?
1) $\{X_۱, X_۲, \ldots, X_n\}$ 2) Normal population
3) Sample mean 4) Sample variance

22- $\bar{X}$ and S^2 are independent --------------------.
1) all the time 2) under uniform assumption
3) if uncorrelated 4) under normal assumption

23- Who first proved the theorem?
1) Fisher 2) Lukacs 3) Geary 4) Pearson

24- Whose proof is easier?
1) Fisher's 2) Geary's 3) Lukacs' 4) Pearson's

25- A condition for the theorem is the existence of the --------------------.
1) variance 2) mean 3) third moment 4) fourth moment

PASSAGE 3:

Most departments of statistics teach at least one course on the difficult concepts of convergence in probability (*P*), almost sure convergence (*a.s.*), convergence in law (*L*), and convergence in *r*th mean (*r*) at the graduate level (see Sethuraman 1995). Indeed, as pointed out by Boyce et al. (2001), "statistical theory is an important part of the curriculum, and is particularly important for students headed for graduate school." Such knowledge is prescribed by learned statistics societies (e.g., the Accreditation of Statisticians by the Statistical Society of Canada and Curriculum Guidelines for Undergraduate Programs in Statistical Science by the American Statistical Association). The main textbooks (e.g., Chung, 1974; Billingsley, 1986; Ferguson, 1996; Lehmann, 2001; Serfling 2002) devote about 15 pages to defining these convergence concepts and their interrelations. Very often, these concepts are provided as definitions, and students are exposed only to some basic properties and to the universal implications.

26- Where do they teach the concepts of convergence?
1) In departments of statistics 2) In colleges
3) In high schools 4) In societies

27- How many concepts of convergence do they teach?
1) One 2) three 3) Two 4) four

28- At what level are the complicated concepts of convergence taught?
1) PhD 2) Graduate 3) Undergraduate 4) High school

29- How many textbooks devoted to convergence are mentioned in the passage?
1) One 2) Two 3) Three 4) Five

30- How are the concepts often provided?
1) As definitions 2) As theorems
3) As examples 4) As homework

دروس پایه:

ریاضیات عمومی

۳۱- انحنای منحنی $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \cosh t\vec{j}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\cosh t}$

۲) $\frac{t}{\cosh^2 t}$

۳) $\frac{1}{\cosh 2t}$

۴) $\frac{1}{\cosh^2 t}$

۳۲- اگر T مکعبی در $\frac{1}{8}$ اول فضا باشد که رئوس آن (۰,۰,۰) و (۱,۰,۰) و (۰,۱,۰) و (۰,۰,۱) هستند، مقدار انتگرال $\iiint_T e^{x+y+z}dv$ کدام است؟

۱) $(e-1)^3$

۲) $e^3 - 1$

۳) $e^3 + 1$

۴) $(e+1)^3$

۳۳- مقدار مشتق پنجم $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ در $x = 0$ کدام است؟

۱) ۱۲۰

۲) ۱۲۰-

۳) ۱-

۴) ۱

۳۴- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^{n-1}}$ ...

۱) واگرا است.

۲) همگراست و مجموع آن $1+\frac{49}{36}$ است.

۳) همگراست و مجموع آن $\frac{7}{6}$ است.

۴) همگراست و مجموع آن $\frac{49}{36}$ است.

۳۵- مجموعه نقاط z در صفحه مختلط که $|z|^2-3|z|+2<0$ کدام است؟

۱) $\{x+iy \mid 2<x^2+y^2<4\}$

۲) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<4\}$

۳) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<3\}$

۴) $\{x+iy \mid 1<x^2+y^2<5\}$

۳۶- مقدار انتگرال معین $\int_0^{\ln 2} e^x \ln(e^{-x}+1)dx$ کدام است؟

۱) $\ln(\frac{4}{27})$

۲) $\ln(\frac{27}{4})$

۳) $\ln(\frac{27}{16})$

۴) $\ln(\frac{9}{4})$

۳۷- f تابعی دو بار مشتق‌پذیر بوده که به ازای $a \neq 0$،

$$\int_0^a (f'(x)+x f''(x))dx = a.$$

مقدار $f'(a)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}a$

۲) 0

۳) 1

۴) a

۳۸- ماکسیمم مقدار $f(x,y)=9-x^2-y^2$ روی خط $x+y=3$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{13}$

۲) $\frac{13}{2}$

۳) $\frac{9}{2}$

۴) $\frac{2}{9}$

۳۹- مقدار انتگرال $\iint_A xe^{x^2-y^2}dydx$ که در آن A ناحیه محدود به خطوط $y=x$، $y=x-1$ ، $y=1$ و $y=0$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\pi^3+\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{4}e^3-\frac{1}{4}e-\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{2}e^3-\frac{1}{2}e-\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{4}\pi^3-\frac{1}{2}$

مبانی علوم ریاضی

۴۰- فرض کنیم $g:Y\to Z$ تابعی دوسویی و $f:X\to Y$ تابع باشد و $h=gof:X\to Z$ کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) اگر f یک به یک باشد آنگاه h تابع دوسویی است.

۲) اگر f یک به یک نباشد آنگاه h یک به یک نیست.

۳) اگر f یک به یک باشد آنگاه h یک به یک است.

۴) اگر f پوشا باشد آنگاه h هم پوشا است.

۴۱- اگر $A-B=\{x: x\in A \,\&\, x\notin B\}$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

۱) $(A\times C)\bigcap(B\times D)=(A\bigcap B)\times(C\bigcap D)$

۲) $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$

۳) $A\bigcup(B-C)=(A\bigcup B)-(A\bigcup C)$

۴) $A\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-(A\bigcap C)$

۴۲- کدام گزینه درست است؟

۱) $\bigcap_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n-1})=\{0\}$

۲) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})=\{1\}$

۳) $\bigcup_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})=[0,2]$

۴) $\bigcup_{n=2}^{\infty}(-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n})=(\frac{-1}{2},1)$

۴۳- فرض کنیم $f:X\to Y$ یک تابع باشد، $A,B\subseteq X$ و $C\subseteq Y$. اگر $A\setminus B$ به مفهوم مکمل B نسبت به A باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $f(f^{-1}(C))=f(X)\bigcap C$

۲) $f(A\bigcap f^{-1}(C))=f(A)\bigcap C$

۳) $f(A\setminus B)=f(A)\setminus f(B)$

۴) $f^{-1}(Y\setminus C)=X\setminus f^{-1}(C)$

۴۴- فرض کنید $a,b\in R$ و $m,n\in N$ در این صورت:

۱) اگر $a<b$ آنگاه $a^n<b^n$

۲) شرط لازم و کافی برای آنکه $a<b$ آنست که $a^3<b^3$

۳) با فرض $a\neq 0$، $m<n$ اگر و تنها اگر $a^m<a^n$

۴) اگر $a^n<b^n$ آنگاه $a<b$

۴۵- فرض کنیم $\aleph_0=card(N)$ عدد اصلی مجموعه اعداد طبیعی N باشد. کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

۲) $\aleph_0=card([0,1])$

۳) به ازای هر $n\in N$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^n$ هم عدد (هم ارز) هستند.

۴) به ازای هر $n\in N$، $\aleph_0^n=\aleph_0$

مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی

۴۶- فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} ۲ & -۴ \\ ۵ & -۲ \end{pmatrix}$. کدام یک از زیرفضاهای $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ روی میدان $\mathbb{C}$ ، تحت A پایا هستند ($\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط است)؟

۱) $<(۱+i\,,\,۲)>$

۲) $<(۱+i\,,\,۱-i)>$

۳) $<(۲\,,\,۲+i)>$

۴) $<(۲\,,\,۱-۲i)>$

۴۷- فرض کنید $X=[۱\,,۰\,,a\,,۱\,,b]$ ماتریسی ۱×۵ با درایه‌های حقیقی باشد. کدام گزینه در مورد پوچی ماتریس X^tX صحیح است؟

۱) پوچی برابر ۴ است.

۲) پوچی برابر ۳ است.

۳) اگر $a=b=۰$ ، پوچی برابر ۲ است.

۴) اگر $a=b=۱$ ، پوچی برابر ۱ است.

۴۸- فرض کنید $\mathbb{C}$ میدان اعداد مختلط باشد و فضای برداری $V=\mathbb{C}^۴$ را روی $\mathbb{C}$ در نظر بگیرید. فرض کنید $W=W_۱+W_۲$ که $W_۱=<(۱,۱,۱,۰)\,,\,(-۱,۰,۱,-۱)>$ ، $W_۲=<(۰,۱,۲,-۱)\,,\,(i,۰,۱,۱)>$ $\mathbb{C}-$ زیر فضاهای V باشند. در این صورت بعد W به عنوان یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

۴۹- فرض کنید $X=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $T:M_{۲\times۲}(\mathbb{R})\to M_{۲\times۲}(\mathbb{R})$ یک نگاشت خطی با ضابطه $T(A)=XA-AX$ باشد. کدام گزینه دربارهٔ بعد هسته T صحیح است؟

۱) $\dim\ker T=۰$

۲) $\dim\ker T=۱$

۳) $\dim\ker T=۲$

۴) $\dim\ker T=۳$

۵۰- فرض کنید ماتریس $A\in M_{۱۰}(\mathbb{R})$ ، $A^۲=A+۲I$ و رتبه‌ی ماتریس $A+I$ برابر ۳ باشد. در این صورت $tr(A)$ برابر است با:

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۱

۴) ۲

۵۱- فرض کنید $\mathbb{Q}$ میدان اعداد گویا است و $A^8 = I\ ,\ A \in M_2(\mathbb{Q})$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) $A^7 = I$
۲) $A^4 = I$
۳) $A^3 = I$
۴) $A^3 = -I$

مبانی آنالیز ریاضی

۵۲- هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت و $\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\limsup a_n \le \limsup \sigma_n$
۲) $\liminf a_n \le \liminf \sigma_n$
۳) $\liminf \sigma_n \le \liminf a_n$
۴) اگر دنباله $\{\sigma_n\}$ همگرا باشد آنگاه دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است.

۵۳- تابع $f : [0,1] \to R$ با ضابطه:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin Q \\ m \sin\frac{1}{n} & x \in Q\ ,\ x = \frac{m}{n}\ ,\ (m,n) = 1 \end{cases}$$

تعریف می‌شود. کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $[0,1]$ پیوسته است.
۲) f در هر نقطه از بازهٔ $[0,1]$ حد دارد.
۳) تعداد نقاط پیوستگی f در $[0,1]$ شمارا است.
۴) ناپیوستگی‌های f در صورت وجود از نوع دوم است.

۵۴- کدام تابع بر $(0,\infty)$ یکنواخت پیوسته است؟

۱) x^2
۲) $x \sin x$
۳) $x \sin\frac{1}{x}$
۴) $\sin\frac{1}{x}$

۵۵- فرض کنیم $f : [a,b) \to R$ تابعی کراندار باشد و تابع $g : [a,b) \to R$ با ضابطهٔ $g(x) = \inf\limits_{a \le t \le x} f(t)$ تعریف شود. در این صورت:

۱) تابع g یکنواخت پیوسته است.
۲) تابع g پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.
۳) اگر تابع f یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع g نیز یکنواخت پیوسته است.
۴) اگر تابع f یکنواخت پیوسته باشد آنگاه تابع g پیوسته است اما لزوماً یکنواخت پیوسته نیست.

۵۶- فرض کنیم تابع غیر ثابت $f:[0,1]\to R$ مشتق‌پذیر باشد، f و f' صفر مشترک نداشته باشند و مجموعهٔ صفرهای f' ناتهی باشد. در این صورت مجموعهٔ صفرهای تابع f :

۱) تهی است.

۲) ناشمارا است.

۳) متناهی است.

۴) شمارای نامتناهی است.

۵۷- فرض کنیم تابع $f:[a,b]\to R$ مشتق‌پذیر باشد و $f'(a)<f'(b)$. کدام گزینه درست است؟

۱) مجموعهٔ $f'([a,b])$ فشرده است.

۲) مجموعهٔ $f'([a,b])$ یک بازه است.

۳) مجموعهٔ $f'([a,b])$ کراندار است.

۴) مجموعهٔ $\{x\in[a,b]: f'(a)\le f'(x)\le f'(b)\}$ یک بازه است.

۵۸- فرض کنیم $f:R\to R$ پیوسته باشد. تساوی $f(0)=0$ از کدام گزینه نتیجه می‌شود؟

۱) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(x+n)dx=0$

۲) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})dx=0$

۳) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (f(x))^n dx=0$

۴) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=0$

۵۹- فرض کنیم $A=\{x>0: \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{x}-1)$ همگرا است$\}$. در این صورت:

۱) $A=\{1\}$

۲) $A=(0,\infty)$

۳) $A=(0,1]$

۴) $A=(\frac{1}{e},e)$

۶۰- فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbf{R}$ باشد و $a_n^+ = \frac{a_n + |a_n|}{2}$, $a_n^- = \frac{a_n - |a_n|}{2}$. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ a_n^-$ همگرا است.

۲) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ همگرا باشند، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

۳) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ همگرا هستند.

۴) اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مشروط باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ واگرا هستند.

۶۱- فرض کنیم A, B دو زیر مجموعه در $\mathbf{R}^n$ باشند و $A - B = \{a - b : a \in A \ , \ b \in B\}$ در این صورت:

۱) اگر $A - B$ همبند باشد حداقل یکی از A و B همبند است.

۲) اگر A و B همبند باشند آنگاه $A - B$ همبند است.

۳) اگر A و B بسته باشند آنگاه $A - B$ بسته است.

۴) اگر A فشرده و B بسته باشد آنگاه $A - B$ فشرده است.

۶۲- فرض کنیم $\mathbf{E}$ و $\mathbf{F}$ دو زیر مجموعه ناتهی در $\mathbf{R}$ باشند. کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $(x,y) \in (E \times F)^\circ$ آنگاه $x \in E^\circ$ و $y \in F^\circ$.

۲) اگر $(x,y) \in (E \times F)'$ آنگاه $x \in E'$ و $y \in F'$.

۳) اگر $(E \times F)' \neq \varnothing$ آنگاه $E' \neq \varnothing$ و $F' \neq \varnothing$.

۴) اگر $E^\circ \cup F^\circ \neq \varnothing$ آنگاه $(E \times F)^\circ \neq \varnothing$.

۶۳- حداقل شرایط روی زیر مجموعه $\mathbf{E}$ از $\mathbf{R}$ که گزاره زیر راست باشد کدام است؟

برای هر دنباله نزولی و تودرتوی $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ از زیر مجموعه‌های فشرده $\mathbf{R}$، اگر $\bigcap_{k=1}^{\infty} K_n \subseteq E$ آنگاه یک $\mathbf{n}$ وجود دارد که $K_n \subseteq E$.

۱) E بسته و لزوماً کراندار است.

۲) E بسته و نه لزوماً کراندار است.

۳) E باز و لزوماً کراندار است.

۴) E باز و نه لزوماً کراندار است.

مبانی آنالیز عددی

۶۴- در یک دستگاه ممیز شناور نرمال شده برای اعداد حقیقی با روش بریدن برای ارقام غیر قابل نمایش در مبنای ۲، هر عدد $x \neq 0$ به صورت $\pm(0.d_1d_2d_3d_4)_2 \times 2^{\pm d_5 d_6}$ نمایش داده می‌شود که $1 \leq d_1 \leq 2$، $0 \leq d_i \leq 2$، $i = 2, \dots, 6$، فاصله بین عدد ۷ و کوچک‌ترین عدد قابل نمایش بزرگ‌تر از ۷ چقدر است؟

۱) $\frac{1}{9}$

۲) $\frac{1}{7}$

۳) $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{3}$

۶۵- در رابطه زیر گزینه صحیح برای نقطه چین کدام است؟

$$\frac{f(x+\frac{h}{2}) - 2f(x) + f(x-\frac{h}{2})}{\frac{h^2}{2}} + o(h^2) = \cdots$$

۱) $f'(x)$

۲) $f''(x+h)$

۳) $f''(x)$

۴) $f'(x+h)$

۶۶- فرض کنید روش نیوتن برای حل مساله $\max(\sin x \cos x - 1)$ به یک عدد مثبت x^* همگرا شده است. نرخ همگرایی مجانبی برابر کدام است؟

۱) یک

۲) دو

۳) خطی

۴) زیرخطی

۶۷- مقدار d، تخمین مشتق تابع $y(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $\bar{x} = 1/05$ با $d = \frac{y_1 - y_2}{0/05}$ که در آن، $y_1 = \sqrt{1/05}$ و $y_2 = 1$، خطای برشی متناسب با .... دارد.

۱) $0/0001$

۲) $0/001$

۳) $0/015$

۴) $0/1$

۶۸- فرمول انتگرال گیری عددی $\int_{0}^{1} f(\sqrt{x})dx \simeq w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1)$ برای چند جمله‌ای‌های تا درجه‌ی ۲ دقیق است. تقریب این فرمول برای $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x}$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{7}{12}$

۳) $\frac{11}{12}$

۴) $\frac{5}{6}$

۶۹- تخمین $y(0/1)$ برای جواب معادله دیفرانسیل به صورت $y(0) = 1$، $y'(x) = e^{x^3}$ با استفاده از سری تیلور مرتبه ۳ (تا مشتق سوم) به ازای یک قدم $h = 0/1$ برابر کدام است؟

۱) ۱/۱۳

۲) ۱/۱۱۱

۳) ۱/۱۱

۴) ۱/۱

مبانی احتمال

۷۰- داده‌های آماری با یک رقم اعشار با نمودار ساقه و برگ (تنه و شاخه) زیر داده شده است.

۷	۱	۱	۲	۳	۳	۶	۷	۸
۸	۱	۲	۳	۴	۴	۵	۶	۶
۹	۲	۲	۳	۳				

داده‌های کم‌تر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می‌کنیم میانگین داده‌های باقیمانده کدام است؟

۱) ۸/۱۱

۲) ۸/۱۶

۳) ۸/۲

۴) ۸/۳۴

۷۱- فرض کنید H ، G و $\bar{x}$ به ترتیب نمایانگر میانگین‌های همساز (هارمونیک، توافقی) ، هندسی و حسابی نمونه باشند. با فرض $x_i = ar^{i-1}$ ، $i = 1,...,n$ که در آن $r > 0$ و $a > 0$ ، کدام رابطه همواره درست است؟

۱) $G^2 = \bar{x} \times H$

۲) $\bar{x}^2 = G \times H$

۳) $G = \frac{\bar{x} + H}{2}$

۴) $H^2 = \bar{x} \times G$

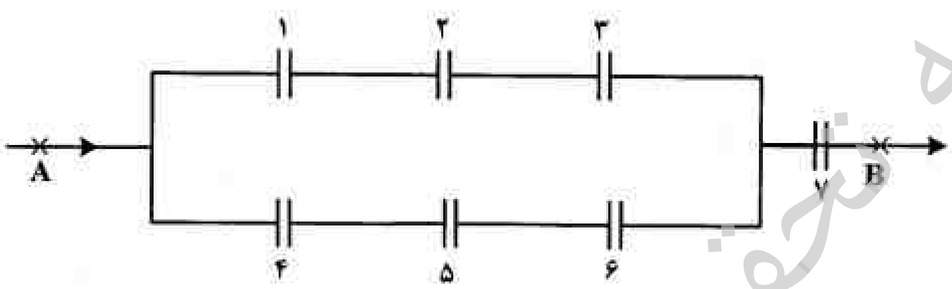
۷۲- در یک شرکت میانگین حقوق ماهیانه کارکنان مرد ۱,۲۰۰,۰۰۰ تومان، میانگین حقوق کارکنان زن ۷۰۰,۰۰۰ تومان و میانگین حقوق کلیه کارکنان ۱,۰۰۰,۰۰۰ تومان است، چند درصد کارکنان زن هستند؟

۱) ٪۳۰
۲) ٪۴۰
۳) ٪۵۰
۴) ٪۶۰

۷۳- سه جعبه با برچسب‌های ۱۰، ۲۵ و ۵۰ تومان مشخص شده‌اند، به چند طریق می‌توان این سه جعبه را با سکه‌های مناسب فوق پر کرد تا ارزش مجموع سه جعبه ۲۰۰۰ تومان باشد؟

۱) ۷۰۳
۲) ۷۱۶
۳) ۸۲۰
۴) ۸۶۱

۷۴- در شکل زیر فرض کنید احتمال این که هر کدام از ۷ رله‌ی شبکه ارتباطی نشان داده شده درست کار کنند برابر p است. در صورتیکه رله‌ها مستقل از یکدیگر کار کنند، احتمال این که بتوان بین دو نقطه A و B ارتباط برقرار کرد کدام است؟

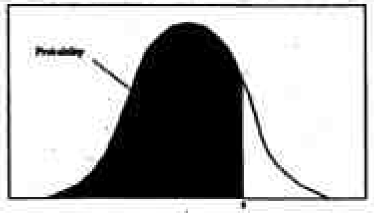


۱) $p^{۴}(۲-p^{۳})$
۲) $p^{۳}(۲-p^{۳})$
۳) $p^{۴}(۱-p^{۳})$
۴) $p^{۳}(۱-p^{۳})$

۷۵- فردی سه سکه در جیب دارد که یکی سالم و دو تای دیگر هر دو طرف شیر هستند. اگر این فرد یک سکه به تصادف از جیب خود خارج و ۲ بار پرتاب کند و هر دو بار شیر مشاهده شود، احتمال اینکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

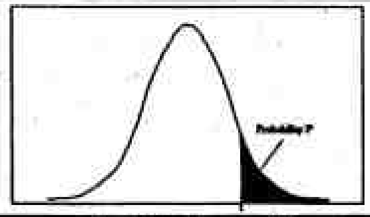
۱) $\frac{۸}{۹}$
۲) $\frac{۴}{۵}$
۳) $\frac{۱}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۹}$

دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱):



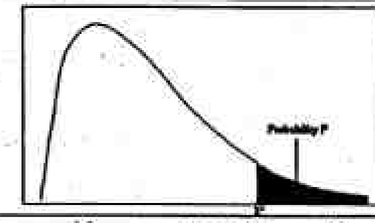
سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.4878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998



مقادیر بحرانی توزیع t

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756



مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df\a	.995	.990	.975	.950	.050	.025	.010	.005
1	4E-5	0.0001	0.0009	0.0039	3.8414	5.0238	6.6349	7.879
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	5.9914	7.3777	9.2103	10.596
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	7.8147	9.3484	11.344	12.838
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	9.4877	11.143	13.276	14.860
5	0.411	0.5543	0.8312	1.1454	11.070	12.832	15.086	16.749
6	0.675	0.8720	1.2373	1.6353	12.591	14.449	16.811	18.547
7	0.989	1.2390	1.6898	2.1673	14.067	16.012	18.475	20.277
8	1.344	1.6465	2.1797	2.7326	15.507	17.534	20.090	21.954
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3251	16.918	19.022	21.665	23.589
10	2.155	2.5582	3.2469	3.9403	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5748	19.675	21.920	24.724	26.756
12	3.073	3.5705	4.4037	5.2260	21.026	23.336	26.216	28.299
13	3.565	4.1069	5.0087	5.8918	22.362	24.735	27.688	29.819
14	4.074	4.6604	5.6287	6.5706	23.684	26.118	29.141	31.319
15	4.600	5.2293	6.2621	7.2609	24.995	27.488	30.577	32.801
16	5.142	5.8122	6.9076	7.9616	26.296	28.845	31.999	34.267
17	5.697	6.4077	7.5641	8.6717	27.587	30.191	33.408	35.718
18	6.264	7.0149	8.2307	9.3904	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.843	7.6327	8.9065	10.117	30.143	32.852	36.190	38.582
20	7.433	8.2604	9.5907	10.850	31.410	34.169	37.566	39.996
21	8.033	8.8972	10.282	11.591	32.670	35.478	38.932	41.401
22	8.642	9.5424	10.982	12.338	33.924	36.780	40.289	42.795
23	9.260	10.195	11.688	13.090	35.172	38.075	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.979	45.558
25	10.52	11.523	13.119	14.611	37.652	40.646	44.314	46.927
26	11.16	12.198	13.843	15.379	38.885	41.923	45.641	48.289
27	11.80	12.878	14.573	16.151	40.113	43.194	46.962	49.644
28	12.46	13.564	15.307	16.927	41.337	44.460	48.278	50.993
29	13.12	14.256	16.047	17.708	42.556	45.722	49.587	52.335
30	13.78	14.953	16.790	18.492	43.772	46.979	50.892	53.671

۷۶- اگر تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی یک مجموعه با تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی آن برابر باشد، تعداد کل زیر مجموعه‌های آن کدام است؟

۱) ۶۴

۲) ۱۲۸

۳) ۲۵۶

۴) ۵۱۲

۷۷- مقدار $\sum_{i=0}^{20} i\binom{20}{i}$ کدام است؟

۱) 4^{20}

۲) 4^{21}

۳) 5×2^{20}

۴) 5×2^{21}

۷۸- اگر X_1 و X_2 به ترتیب تعداد خال‌های ظاهر شده در پرتاب مستقل دو تاس سالم باشند، احتمال اینکه X_1 کمتر از X_2 باشد کدام است؟

۱) $\frac{4}{12}$

۲) $\frac{5}{12}$

۳) $\frac{6}{12}$

۴) $\frac{7}{12}$

۷۹- دو نقطه به تصادف و مستقل از یکدیگر در فاصله $[0,1]$ انتخاب می‌شود. اگر D فاصله بین این دو نقطه باشد، مقدار $P(D\le 0/1)$ کدام است؟

۱) ۰/۱۸

۲) ۰/۱۹

۳) ۰/۸۱

۴) ۰/۹۱

۸۰- اگر متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع زیر باشد، مقدار k کدام است؟

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ k(x-1)^4 & 1\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$$

۱) $\frac{1}{16}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) 1

۸۱- اگر $Y_1,\dots,Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال لگاریتمی (LN) (لاگ نرمال) با میانگین صفر و واریانس ۱ باشد، توزیع متغیر تصادفی $X=\prod_{i=1}^{n} Y_i^{\alpha}$، که در آن $\alpha>0$، کدام است؟

۱) $N(0,\ n\alpha)$

۲) $N(0,\ n\alpha^2)$

۳) $LN(0,\ n\alpha)$

۴) $LN(0,\ n\alpha^2)$

۸۲- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسن با میانگین ۱ باشد. اگر $T=\bar{X}(n-\bar{X})$، کران بالا برای $P(T=0)$ کدام است؟

۱) e^{-n} ۲) e^{-2n} ۳) $2e^{-n}$ ۴) $2e^{-2n}$

۸۳- فرض کنید برای متغیرهای تصادفی هم توزیع $X_1,\dots,X_n$ داشته باشیم:

$$(X_i,X_j)\overset{d}{=}(X_1,X_2)\ ;\ \forall\ i\neq j\ ,\ \sum_{i=1}^{n} X_i=0$$

ضریب همبستگی X_1 و X_2 کدام است؟

۱) $-\frac{1}{n-1}$

۲) $-\frac{1}{n}$

۳) $\frac{1}{n}$

۴) $\frac{2}{n(n-1)}$

۸۴- اگر $Z \sim N(\circ,1)$، مقدار $Var(Z\,|\,|Z|)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) ۳

۴) ۴

۸۵- فرض کنید X_1, X_2, X_3, X_4 متغیرهای تصادفی iid از توزیع برنولی با پارامتر p باشند، قرار دهید $X = \sum_{i=1}^{4} X_i$ ، مقدار $E\left[X_1 \mid X = 2\right]$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵

۲) $\frac{1}{3}$

۳) ۰/۵

۴) ۱

۸۶- فرض کنید $X \sim U(\circ,3)$ و $Y = \begin{cases} 3 & X < 1 \\ 3X & X \geq 1 \end{cases}$، مقدار $E(Y)$ کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) $\frac{9}{2}$

۴) ۵

۸۷- فر ض کنید $P(T=1) = P(T=-1) = \frac{1}{2}$ ، $X \sim N(\circ,1)$ و متغیرهای تصادفی X و T از یکدیگر مستقل باشند، توزیع $Y = XT$ کدام است؟

۱) $N(\circ, \frac{1}{4})$

۲) $N(\circ, 1)$

۳) $bin(2, \frac{1}{4})$

۴) $bin(2, \frac{1}{2})$

۸۸- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=2x, 0<x<1$ باشد، قرار دهید $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$. اگر $\frac{\sqrt{n}(Y_n-a)}{b}\xrightarrow{d}N(0,1)$، مقادیر a و b کدام است؟

۱) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\sqrt{\frac{1}{12}}$

۲) $a=\frac{1}{2}\ ,\ b=\frac{1}{2}$

۳) $a=\frac{1}{4}\ ,\ b=\sqrt{\frac{1}{12}}$

۴) $a=\frac{1}{4}\ ,\ b=\frac{1}{2}$

۸۹- برای یک نمونه تصادفی ۳ تایی از توزیع یکنواخت روی فاصله $(0,1)$، احتمال اینکه میانه نمونه بین $\frac{1}{4},\frac{3}{4}$ باشد کدام است؟

۱) $\frac{9}{16}$

۲) $\frac{10}{16}$

۳) $\frac{11}{16}$

۴) $\frac{12}{16}$

۹۰- ده دوچرخه‌سوار در یک مسابقه شرکت دارند. هر دوچرخه سوار مسابقه را در مدت زمان T (ساعت) با تابع چگالی احتمال زیر به پایان می‌رساند. احتمال اینکه دوچرخه‌سواری با کمتر از نیم ساعت برنده مسابقه شود، کدام است؟

$f_T(t)=te^{-t}\quad ,t>0$

۱) $1-\left(\frac{3}{2}e^{-0/5}\right)^{10}$

۲) $1-\left(\frac{1}{2}e^{-0/5}\right)^{10}$

۳) $\left(\frac{3}{2}e^{-0/5}\right)^{10}$

۴) $\left(\frac{1}{2}e^{-0/5}\right)^{10}$

۹۱- متغیر تصادفی X دارای تابع مولد گشتاوری به صورت زیر است. تابع احتمال این متغیر کدام است؟

$$M_X(t)=\frac{1}{2}\left[2+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\dots\right]$$

۱) $P(X=k)=\frac{3}{4}(\frac{1}{2})^{2k}\ ;\ k=0,1,2,\dots$

۲) $P(X=k)=\frac{e^{-1}}{k!}\ ;\ k=0,1,2,\dots$

۳) $P(X=k)=\frac{1}{4}\ \text{if}\ ,\ k=1,-1,2,-2,\dots$

۴) $P(X=k)=\begin{cases}\frac{1}{4} & \text{if}\ \ k=1,-1\\ \frac{1}{2} & \text{if}\ \ k=0\end{cases}$

۹۲- اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع $N(1,1)$ باشد، مقدار $Var(e^X)$ کدام است؟

۱) $e-1$

۲) $e(e-1)$

۳) $e^2(e-1)$

۴) $e^3(e-1)$

۹۳- تعداد زمین لرزه‌ها در یک منطقه از توزیع پوآسن با نرخ λ زمین‌لرزه در سال پیروی می‌کند. درصورتیکه بدانیم دقیقاً دو زمین‌لرزه در یک سال رخ داده، احتمال اینکه هر دو زمین لرزه در سه ماهه اول سال رخ داده باشد کدام است؟ (برای سادگی همه ماه‌ها را سی روزه و هر سال را ۱۲ ماه یعنی ۳۶۰ روز در نظر بگیرید.)

۱) $\frac{1}{16}$

۲) $\frac{1}{12}$

۳) $\frac{64}{225}$

۴) $4e^{-4}$

۹۴- فرض کنید X به شرط $Y=y$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $(0,y)$ و توزیع Y، گاما با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β باشد. واریانس X کدام است؟

۱) $\frac{\alpha\beta^2}{12}$

۲) $\frac{\alpha\beta^2(\alpha+4)}{12}$

۳) $\frac{\alpha\beta(1+\beta)}{12}$

۴) $\frac{\alpha\beta^2(1+4\beta)}{12}$

۹۵- اگر $X_1, X_2, \ldots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل از هم با توزیع یکسان $U(0,1)$ باشند. توزیع حدی $Y_n = nX_{(1)}$ کدام است؟

۱) $\text{Exp}\left(\frac{1}{4}\right)$

۲) $\text{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)$

۳) $\text{Exp}(1)$

۴) $\text{Exp}(2)$

۹۶- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ و $Y_1, \ldots, Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع‌های به ترتیب $E(\lambda)$ و $I\Gamma(1,\lambda)$ باشند. آماره بسنده می‌نیمال کدام است؟

(راهنمایی: $Y \sim I\Gamma(\alpha,\lambda) \to f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha+1}} e^{-\frac{\lambda}{y}}$, $X \sim E(\lambda) \to f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$)

۱) $\sum_{i=1}^{n} X_i . Y_i^{-1}$

۲) $\prod_{i=1}^{n} X_i . Y_i^{-1}$

۳) $\sum_{i=1}^{n} \left(X_i + Y_i^{-1}\right)$

۴) $\prod_{i=1}^{n} \left(X_i + Y_i^{-1}\right)$

۹۷- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $B(1,\theta)$ باشد. کدام‌یک از آماره‌های زیر بسنده هستند؟

$$(i)(X_1, ..., X_n),\quad (ii)(X_1^2, ..., X_n^2),\quad (iii)\left(\sum_{i=1}^{k} X_i, \sum_{i=k+1}^{n} X_i\right)$$

$$(iv)\sum_{i=1}^{n} X_i,\quad (v)\bar{X},\quad (vi)\sum_{i=1}^{n} X_i^2,\quad (vii)(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2$$

۱) فقط آماره‌های $(v)-(i)$ برای θ بسنده هستند.

۲) فقط آماره‌های $(vi)-(i)$ برای θ بسنده هستند.

۳) کلیه آماره‌ها به جز (vi) برای θ بسنده هستند.

۴) کلیه آماره‌ها برای θ بسنده هستند.

۹۸- فرض کنید X دارای تابع چگال احتمال زیر باشد،

$$f(x) = cf_1(x)f_2^2(x)\ ,\ x = 0, 1, ..., m$$

که در آن $f_1(x)$ تابع احتمال توزیع دو جمله‌ای با پارامترهای (m,θ) و $f_2(x)$ تابع احتمال توزیع هندسی با پارامتر θ می‌باشند. بر اساس یک نمونه تصادفی $X_1, ..., X_n$ از X آماره بسنده برای θ کدام است؟

۱) $\sum_{i=1}^{n} X_i$

۲) $\prod_{i=1}^{n} X_i$

۳) $\sum_{i=1}^{n} \binom{m}{X_i}$

۴) $\prod_{i=1}^{n} \binom{m}{X_i}$

۹۹- تعداد k سکه سالم را ۱۰ بار مستقل از هم پرتاب می‌کنیم. اگر تعداد شیرها در ۱۰ پرتاب به صورت زیر باشد، برآورد گشتاوری k کدام است؟

۷ , ۸ , ۸ , ۴,۳,۱۰,۸,۶ , ۷ , ۹

۱) ۲۰

۲) ۱۴

۳) ۱۰

۴) ۷

۱۰۰- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر ماکزیمم درستنمایی (MLE) پارامتر p کدام است؟

$$f(x,p)=\begin{cases} p & x=1 \\ 1-p & x=-1 \end{cases}$$

۱) $\frac{\bar{X}}{2}$

۲) $\bar{X}$

۳) $\frac{\bar{X}-1}{2}$

۴) $\frac{\bar{X}+1}{2}$

۱۰۱- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع هندسی با تابع احتمال زیر باشد. اگر $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i u(X_i-2)$ باشد، که در آن $u(t)=\begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$ است، T برآوردگر ناریب کدام است؟

$$f_\theta(x)=\theta(1-\theta)^{x-1}, \quad x=1,2,\dots, \; 0<\theta<1$$

۱) $\frac{1}{\theta}-\theta$

۲) $\theta-\frac{1}{\theta}$

۳) $\frac{1-\theta}{\theta}$

۴) $\frac{\theta}{1-\theta}$

۱۰۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(0,\theta)$ باشد. برآوردگر ناریب با کمترین واریانس (UMVUE) پارامتر θ^k کدام است؟

۱) $\Gamma(k+n)\left(\sum X_i^2\right)^k$

۲) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(\sum X_i^2\right)^k}{\Gamma\left(k+\frac{n}{2}\right)2^k}$

۳) $\sum_i X_i^{2k}$

۴) $\left(\sum_i X_i^2\right)^k$

۱۰۳- اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\theta x^{\theta-1}}{(1+x)^{\theta+1}} & x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برآوردگر UMVU پارامتر $\frac{1}{\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{X_i+1}\right)$

۲) $\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{X_i}\right)$

۳) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{X_i}\right)$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{X_i}{1+X_i}\right)$

۱۰۴- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. UMVUE پارامتر $\gamma(\theta) = P_\theta(X_1 + X_2 \le a)$، که در آن a مقدار ثابت و معلوم است، کدام است؟ (Φ نمایانگر تابع توزیع نرمال استاندارد است).

۱) $\Phi\left(\sqrt{\frac{2n}{n-2}}\left(\frac{a}{2}-\bar{X}\right)\right)$

۲) $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(a-\bar{X}\right)\right)$

۳) $\Phi\left(\sqrt{\frac{2n}{n-2}}\left(a-\bar{X}\right)\right)$

۴) $\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{n-1}}\left(2a-\bar{X}\right)\right)$

۱۰۵- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی n تایی از توزیع $N(\mu,1)$ باشد. کران پائین کرامر ـ رائو برای واریانس برآوردگر ناریب $P(X_1 > 2\mu)$ ، کدام است؟

۱) $e^{-\mu}$

۲) $\frac{e^{-\mu}}{n}$

۳) $\frac{\mu^2}{2\pi n}$

۴) $\frac{e^{-\mu^2}}{2\pi n}$

۱۰۶- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از تابع چگالی احتمال زیر باشد. ضریب اطمینان فاصله‌ی تصادفی $(\min(X_i), \max(X_i))$ کدام ست؟

$$f(x;\theta)=\frac{1}{2}e^{-|x-\theta|} \quad -\infty < x < \infty \ , \ -\infty < \theta < \infty$$

۱) $1-\frac{1}{2^n}$

۲) $1-\frac{1}{2^{n-1}}$

۳) $1-\frac{1}{2^{n-2}}$

۴) $1-\frac{1}{2^{n+1}}$

۱۰۷- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ یک نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. یک بازه اطمینان $100(1-\alpha)$ درصدی با دم‌های برابر برای θ بر پایه‌ی MLE پارامتر θ کدام است؟

$$f(x,\theta)=e^{-x+\theta} \ , \ x>\theta$$

۱) $\bar{X}-1\pm\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

۲) $X_{(1)}\pm\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$

۳) $\left(X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right), X_{(1)}+\frac{1}{n}\ln(1-\frac{\alpha}{2})\right)$

۴) $\left(\bar{X}-\frac{1}{2n}X^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n), \bar{X}+\frac{1}{2n}X^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)\right)$

۱۰۸- متغیر تصادفی X در فاصلهٔ $(0,1)$ دارای تابع توزیع احتمال $F(x)=x^6$ یا $G(x)=x^3$ است. بر اساس یک مشاهده، پرتوانترین آزمون برای $H_0: X \sim F$ در برابر $H_1: X \sim G$ را در نظر می‌گیریم. رابطهٔ میان احتمال خطای نوع اول (α) و توان آزمون (π) کدام است؟

۱) $\pi=\alpha^2$

۲) $\alpha=\pi^2$

۳) $1-\alpha=(1-\pi)^2$

۴) $\alpha=(1-\pi)^2$

۱۰۹- فرض کنید X دارای تابع احتمال زیر باشد

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\theta & x=-1\\ (1-\theta)^2\theta^x & x=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

برای انجام آزمون $H_0: \theta=\frac{1}{2}$ در مقابل $H_1: \theta=\frac{3}{4}$ ، پر توان‌ترین آزمون اندازه $\alpha=\frac{1}{32}$ کدام است؟

۱) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\geq 4\\ \frac{1}{16} & x=-1\\ 0 & 0\leq x<4\end{cases}$

۲) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\geq 4\\ 0 & x<4\end{cases}$

۳) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\geq 5\\ \frac{1}{32} & x=-1\\ 0 & 0\leq x\leq 4\end{cases}$

۴) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x\geq 5\\ \frac{1}{64} & x=-1\\ 0 & 0\leq x\leq 4\end{cases}$

۱۱۰- فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال زیر باشند،

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \quad , \quad 0 < x < 1$$

ناحیه رد آزمون پرتوان (MP) برای آزمون $H_0 : \theta = 1$ در مقابل $H_1 : \theta = 2$ در سطح $\alpha = \frac{1}{2}(1 - Ln2)$ کدام است؟

۱) $X_1 X_2 > \frac{1}{2}$

۲) $X_1 + X_2 > \frac{1}{2}$

۳) $X_1 X_2 < \frac{1}{2}$

۴) $X_1 + X_2 < \frac{1}{2}$

۱۱۱- اگر $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه $(0, \theta)$ باشد، $\theta > 0$ ، تابع توان پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (UMP) برای آزمون $H_0 : \theta \leq 1$ در برابر $H_1 : \theta > 1$ کدام است؟

۱) $\frac{1-\alpha}{\theta^n}$

۲) $1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n}$

۳) $1 - \frac{\alpha}{\theta^n}$

۴) $1 - \left(\frac{1-\alpha}{\theta}\right)^n$

۱۱۲- فرض کنید $X_1, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی و مستقل از توزیع $U(-\theta, \theta)$ باشد. برای آزمون $H_0 : \theta = 1$ در مقابل $H_1 : \theta > 1$ ناحیه ردی به شکل $\max |X_i| > c$ در نظر گرفته شده است. مقدار c و تابع توان آزمون، $\beta^*(\theta)$ برای سطح α کدام است؟

۱) $c = \sqrt[n]{1-\alpha}\ , \ \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n}$

۲) $c = \sqrt[n]{\alpha}\ , \ \beta^*(\theta) = \theta^{-n}\alpha$

۳) $c = 2\sqrt[n]{\alpha}\ , \ \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{(2\theta)^n}$

۴) $c = 2\sqrt[n]{1-\alpha}\ , \ \beta^*(\theta) = 1 - \frac{1-\alpha}{\theta^n}$

۱۱۳- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $E(\theta,1)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد، برای آزمون $H_0: \theta \le 2$ در مقابل $H_1: \theta > 2$ در سطح $\alpha = e^{-2}$، ناحیه رد آزمون UMP کدام است؟

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}; x \ge \theta$$

۱) $X_{(1)} > 2(1 + \frac{1}{n^2})$

۲) $X_{(1)} > 2(1 + \frac{1}{n})$

۳) $X_{(1)} > 2(1 - \frac{1}{n})$

۴) $X_{(1)} > 2(1 - \frac{1}{n^2})$

۱۱۴- فرض کنید X تک مشاهده‌ای از خانواده‌های توزیع‌های زیر باشد. هم‌چنین فرض کنید $\Theta_0 = \{\theta_1, \theta_2\}$ باشد، برای آزمون فرض $H_0: \theta \in \Theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \notin \Theta_0$ و در سطح $\alpha = 0/05$، آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته کدام است؟

	x_1	x_2	x_3
θ_1	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۸
θ_2	۰/۸	۰/۱	۰/۱
θ_3	۰/۷	۰/۲۵	۰/۰۵

۱) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = x_1, x_2 \\ 0 & x = x_3 \end{cases}$

۲) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} & x = x_3 \\ 0 & x \ne x_3 \end{cases}$

۳) $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = x_1 \\ 0 & x \ne x_1 \end{cases}$

۴) $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = x_2 \\ 0 & x \ne x_2 \end{cases}$

۱۱۵- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $E(\mu,\sigma)$ با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برای آزمون فرض $H_0 : \mu = ۲$ در مقابل $H_1 : \mu \neq ۲$ آمارهٔ آزمون نسبت درستنمایی تعمیم یافته و توزیع آن تحت H_0 کدام است؟

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-(x-\mu)/\sigma} \;\; ; \;\; x \geq \mu$$

۱) $\dfrac{n(X_{(1)} - 2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - 2)}$ و دارای توزیع $F_{2,2n}$

۲) $\dfrac{n(X_{(1)} - 2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})}$ و دارای توزیع $F_{2,2n-2}$

۳) $\dfrac{n(n-1)(X_{(1)} - 2)}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})}$ و دارای توزیع $F_{2,2n-2}$

۴) $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_{(1)})}{n(n-1)(X_{(1)} - 2)}$ و دارای توزیع $F_{2n,2}$

۱۱۶- یک نمونه تصادفی ساده (بدون جای‌گذاری) اولیه به حجم n را در نظر بگیرید. اگر بدانیم که با دو برابر کردن حجم نمونهٔ واریانس برآوردگر میانگین جامعه ۳ برابر می‌شود، کسر نمونه‌گیری اولیه کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$

۲) $\frac{1}{4}$

۳) $\frac{1}{3}$

۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۷- در یک نمونه‌گیری تصادفی ساده با جای‌گذاری به حجم n از جامعه‌ای به حجم N، احتمال انتخاب شدن دو عضو اول و دوم جامعه در نمونه کدام است؟

۱) $\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}\right]^{2}$

۲) $1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}$

۳) $1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}$

۴) $1-2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n}+\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n}$

۱۱۸- از جامعه‌ای به حجم ۱۰۰۰ نمونه‌ای به حجم ۱۰ به روش تصادفی ساده با جای‌گذاری گرفته‌ایم، اگر میانگین نمونه‌ای برابر حجم نمونه و مجموع توان دوم واحدهای نمونه، ۲/۵ برابر حجم جامعه باشد، برآورد ناریب واریانس میانگین نمونه‌ای چقدر است؟

۱) ۱۶/۵

۲) ۱۶/۶۷

۳) ۱۵

۴) ۲۵/۶۷

۱۱۹- فرض کنید بدانیم نسبت افراد طرفدار یک کاندید انتخاباتی در سال گذشته ۶۰٪ بوده است. می‌خواهیم با یک تحقیق نمونه‌ای، این نسبت را طوری برآورد کنیم که با ضریب اطمینان ۹۵٪ این نسبت در فاصله اطمینان (۰/۵,۰/۷) قرار گیرد. با صرف‌نظر کردن از نسبت نمونه‌گیری، تعداد نمونه لازم کدام است؟

$Z_{0/025}=2$

۱) ۹۰

۲) ۹۲

۳) ۹۵

۴) ۹۷

۱۲۰- در نمونه‌گیری تصادفی ساده (بدون جای‌گذاری) به حجم n از جامعه‌ای متناهی به حجم N اگر حداکثر واریانس برآوردگر نسبت جامعه برابر با $\frac{1}{100}$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) $n=\frac{25N}{N+24}$

۲) $n=\frac{25N}{N-1}$

۳) $n=\frac{24N}{N+25}$

۴) $n=\frac{96N}{N+96}$

۱۲۱- فرض کنید جامعه‌ای به حجم N موجود است. در یک نمونه‌گیری از دو طبقه مایلیم بجای n_1 و n_2 در تخصیص نیمن داشته باشیم $n_1 = n_2$. اگر $var(\bar{Y}st)$ معرف واریانس در حالت $n_1 = n_2$ و $var_{opt}(\bar{Y}st)$ ، واریانس مربوط به تخصیص نیمن باشد، در صورتیکه N به اندازه کافی بزرگ و $n_2 = 3n_1$ آنگاه در مورد نسبت $ef = \frac{var_{opt}(\bar{Y}st)}{var(\bar{Y}st)}$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $ef = \frac{1}{5}$

۲) $ef = \frac{4}{5}$

۳) $ef = \frac{2}{5}$

۴) $ef = \frac{3}{5}$

۱۲۲- در چه صورت در نمونه‌گیری طبقه‌ای تخصیص متناسب، بهینه است؟

۱) حجم طبقات برابر باشد.

۲) تغییرات داخل طبقات کوچک باشد.

۳) تغییرات داخل طبقات یکسان باشد.

۴) حجم طبقات متناسب با واریانس طبقات باشد.

۱۲۳- اگر داده‌های حاصل از یک روش نمونه‌گیری طبقه‌ای را بدون در نظر گرفتن طبقه‌ها با یکدیگر ادغام نموده و از میانگین معمولی مشاهدات برای برآورد میانگین جامعه استفاده کنیم، یک شرط کافی برای نااریب بودن این برآوردگر کدام است؟

۱) حجم نمونه‌ها برابر باشند.

۲) حجم طبقه‌ها یکسان باشند.

۳) نسبت حجم نمونه در هر دو طبقه دلخواه ثابت باشد.

۴) نسبت حجم نمونه به حجم طبقه در تمام طبقات جامعه برابر باشد.

۱۲۴- جامعه‌ای به حجم N را در نظر بگیرید. فرض کنید کوچکترین و بزرگترین عضو جامعه معلوم و به ترتیب برابر $y_{(1)}$ و $y_{(N)}$ باشند. دو برآوردکننده برای برآورد مجموع عناصر جامعه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود

$$T_1 = N\bar{y}_n \quad \text{و} \quad T_2 = y_{(1)} + y_{(N)} + (N-2)\bar{y}'_n$$

که در آن $\bar{y}_n$ و $\bar{y}'_n$ به ترتیب میانگین نمونه‌ای حاصل از انتخاب n نمونه به روش تصادفی ساده بدون جای-گذاری از کل جامعه و از جامعه بدون عناصر $y_{(1)}$ و $y_{(N)}$ است. کدام عبارت صحیح است؟

۱) T_2 برآوردکننده‌ای اریب است و واریانس آن از واریانس T_1 بیشتر است.

۲) T_2 برآوردکننده‌ای اریب است و واریانس آن از واریانس T_1 کمتر است.

۳) T_2 برآوردکننده‌ای نااریب است و واریانس آن از واریانس T_1 کمتر است.

۴) T_2 برآوردکننده‌ای نااریب است و واریانس آن از واریانس T_1 بیشتر است.

۱۲۵- می‌خواهیم از یک جامعه متناهی به حجم N یک نمونه تصادفی ساده به حجم n انتخاب کنیم. اگر در چارچوب این جامعه نام عنصر اول به اشتباه دو بار ثبت شده باشد، اریبی برآوردگر میانگین مشاهدات برای میانگین کل جامعه $\overline{y}_N$ کدام است؟

۱) y_1

۲) $\dfrac{y_1}{N+1}$

۳) $\dfrac{\overline{y}_N - y_1}{N}$

۴) $\dfrac{y_1 - \overline{y}_N}{N+1}$

۱۲۶- در یک مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ، $i = 1, 2, \ldots, n$ ، $var(Y_i - \hat{Y}_i)$ کدام است؟

۱) $var(Y_i)$

۲) $var(Y_i) - var(\hat{Y}_i)$

۳) $var(Y_i) - 2\,var(\hat{Y}_i)$

۴) $var(Y_i) + var(\hat{Y}_i)$

۱۲۷- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$ می‌خواهیم فرض $H_0 : \beta_1 = 0$ را در مقابل فرض $H_1 : \beta_1 \neq 0$ آزمون کنیم. بر اساس یک نمونه تصادفی ۱۸ تایی معادله خط رگرسیونی y روی x و x روی y به ترتیب عبارتند از $\hat{y} = 0/67 + 1/2x$ و $\hat{x} = 2/5 + 0/3y$. مقدار آماره آزمون و درجه آزادی آماره کدام است؟ (فرض نرمال بودن ε برقرار است).

۱) $t = 3$ با ۱۶ درجه آزادی

۲) $t = -3$ با ۱۶ درجه آزادی

۳) $F = 3$ با درجه‌های آزادی یک و ۱۶

۴) $F = 9$ با درجه‌های آزادی یک و ۱۷

۱۲۸- مدل $y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{6} \beta_j X_{ij} + \varepsilon_i$ ، $\varepsilon_i \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$ و $(i = 1, 2, \ldots, n)$ را در نظر بگیرید. اگر $\hat{\beta}_2 = -3$ با خطای معیار ۱/۵ بدست آمده باشد، برای آزمون $H_0 : \beta_2 = 0$ مقدار آماره F کدام است؟

۱) $\dfrac{4}{3}$

۲) $\dfrac{16}{9}$

۳) ۲

۴) ۴

۱۲۹- فرض کنید مشاهدات Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 به صورت زیر داده شده است، که در آن β_1, β_2 پارامترهای مدل و $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ها مستقل از هم هستند، برآورد پارامترهای (β_1, β_2) ، به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

$$y_1 = \beta_1 + \beta_2 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \beta_1 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = -\beta_2 + \varepsilon_3$$
$$y_4 = \beta_1 - \beta_2 + \varepsilon_4$$

۱) $\left(\frac{y_1 + y_2 + y_4}{3}, \frac{y_1 - y_3 - y_4}{3}\right)$

۲) $\left(\frac{2y_1 + y_2 - y_3}{4}, \frac{2y_1 - y_3 + y_4}{4}\right)$

۳) $\left(\frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \frac{y_1 + y_2 - y_3 - y_4}{4}\right)$

۴) $\left(\frac{y_1 + y_2 + y_4}{4}, \frac{y_1 + y_3 + y_4}{3}\right)$

۱۳۰- در مدل رگرسیون خطی ساده $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \;,\; i = 1, \dots, n$ ، براساس برآوردهای روش کمترین توان دوم خطا، اگر $r_{x,y}$ ضریب همبستگی نمونه‌ای بین بردارهای $x = (x_1, \dots, x_n)'$ و $y = (y_1, \dots, y_n)'$ باشد، ضریب همبستگی نمونه‌ای بین بردارهای $y = (y_1, \dots, y_n)'$ و $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)'$ برحسب $r_{x,y}$ کدام است؟

۱) $r_{x,y}$

۲) $r^2_{x,y}$

۳) $|r_{x,y}|$

۴) $\frac{n}{n-2} r^2_{x,y}$

۱۳۱- در رگرسیون خطی ساده مدل را براساس n مشاهده برازش می‌دهیم. اگر مشاهده جدید $(\bar{x}, \bar{y})$ که در آن $\bar{x}$ و $\bar{y}$ میانگین‌های n مشاهده اول‌اند به داده‌ها افزوده شود، مقدار آماره F جدول تحلیل واریانس چقدر افزایش می‌یابد؟

۱) تغییر نمی‌کند.

۲) $\frac{R}{\sqrt{1-R^2}}$

۳) $\frac{R^2}{1-R^2}$

۴) $\frac{(n-1)R^2}{1-R^2}$

۱۳۲- داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

$Y:$	-3	2	-1	2	0	4
$X_1:$	-2	-2	0	0	2	2
$X_2:$	-2	2	-2	2	-2	2

چنانچه مدل خطی $y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$ که در آن $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$، مناسب باشد، برآورد پارامترهای $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

۱) $\left(\frac{4}{6}, \frac{10}{16}, 1\right)$

۲) $\left(\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{4}\right)$

۳) $\left(3, -2, \frac{1}{2}\right)$

۴) $\left(\frac{3}{16}, \frac{7}{24}, 2\right)$

۱۳۳- در برازش مدل رگرسیونی $E(y) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$ ، $SSR = 150$ و $MSE = 3$ بدست آمده است. همچنین در برازش مدل $E(y) = \beta_0 + \beta_1 X$ ، $SSR = 120$ حاصل شده است. برای آزمون $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$ مقدار آماره‌ی F کدام است؟

۱) ۵

۲) ۱۰

۳) ۱۴/۵

۴) ۲۸/۳

۱۳۴- براساس یک نمونه تصادفی ۱۰ تایی از (x, y) داریم:

$$S_{YY} = \sum (Y_i + 2)^2 = 25 \quad \text{و} \quad S_{xx} = \sum (X_i - 5)^2 = 16 \ ، \ r = -0.80$$

خط رگرسیون برازش شده به روش کمترین توان دوم خطا کدام است؟

۱) $\hat{y} = 3 - 1.2x$

۲) $\hat{y} = -3 - 0.16x$

۳) $\hat{y} = 3 - x$

۴) $\hat{y} = -7 - 0.16x$

۱۳۵- اگر به جای مدل رگرسیون خطی واقعی $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ ، مدل $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon$ برازش داده شده باشد و $\hat{\beta}_1$ برآوردگر پارامتر β_1 به روش کمترین توان‌های دوم خطا در مدل برازش داده شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{\beta}_1$ برآوردگر ناریب β_1 است.

۲) $\hat{\beta}_1$ برآوردگر ناریب β_1 می‌شود اگر x_1 و x_2 ناهمبسته باشند.

۳) واریانس $\hat{\beta}_1$ بیشتر از واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم خطای β_1 براساس مدل واقعی است.

۴) اگر x_1 و x_2 ناهمبسته باشند، واریانس $\hat{\beta}_1$ بیشتر از واریانس برآوردگر کمترین توان‌های دوم خطای β_1 براساس مدل واقعی است.