www.isijournal.net

436

F

436F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

موسسه تحقیقاتی آرمان

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

عصر جمعه
۹۵/۰۲/۱۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ـ سال ۱۳۹۵

مجموعهٔ آمار ـ کد ۱۲۰۷

تعداد سؤال: ۱۳۵ — مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی(انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم‌ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، مبانی آنالیزریاضی، مبانی آنالیزعددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (احتمال، آماریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

www.isijournal.net

زبان عمومی و تخصصی(انگلیسی):

PART A: Vocabulary
Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

1- **With the pace of life in Indian metros getting faster by the day, many of the old Indian traditions have fallen into --------- and are no longer practiced.**
1) indifference 2) equilibrium 3) abeyance 4) annoyance

2- **We thought he was reliable till we realized that he had given us a --------- address.**
1) dishonest 2) fake 3) skeptical 4) vulnerable

3- **His expression was gloomy at every game; I don't think I saw him smile even when his team --------- a hundred points.**
1) scored 2) connected 3) achieved 4) displayed

4- **The approaching rain gave us a --------- excuse to escape the boring party.**
1) harmless 2) monotonous 3) secret 4) plausible

5- **The relationship between the earthworm and the garden is ---------: the garden provides a home for the earthworm, while the earthworm provides manure for the garden and keeps it fertile.**
1) impractical 2) symbiotic 3) latent 4) paradoxical

6- **When it was discovered that he had been operating as a spy, he was badly --------- in the press as being a traitor.**
1) incorporated 2) censured 3) concerned 4) constrained

7- **Contemporary research into the origins of DeLong culture indicates that a hunter-gatherer society was established about 2,000 years earlier than was --------- thought.**
1) similarly 2) sufficiently 3) previously 4) accurately

8- **An attempt was made to ignore this brilliant and irregular book, but in ---------; it was read all over Europe.**
1) jeopardy 2) chaos 3) contempt 4) vain

9- **He strictly warned him that if he did not take the medicine in time, the pain would not ---------.**
1) subside 2) degrade 3) avoid 4) collapse

10- **To reduce ---------, the company will no longer mail monthly paper statements to those with access to online statements.**
1) fright 2) hesitation 3) conflict 4) waste

PART B: Cloze Passage
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Becoming a mother is a major transition, points out clinical psychologist Ann Dunnewold, (11) ---------- in Dallas, Tex., provides support for mothers. New mothers give up autonomy, sleep and relationships (12) ---------- to the relentless needs of a baby. On top of that, they are also expected to be in a constant state of bliss and fulfillment (13) ---------- their new role. "There's a lot of pressure to be the perfect mother, (14) ---------- they're not coping," Leahy-Warren says.

www.isijournal.net

Making matters worse, research that demonstrates the importance of early childhood experiences in determining future success and happiness (15) ---------- on moms to get it right.

11- 1) practices 2) whose practice 3) practicing 4) she practices
12- 1) with tending 2) tend 3) to tend 4) that tend
13- 1) of 2) by 3) in 4) with
14- 1) and they are afraid to say 2) while afraid to say
3) but they say they are afraid of what 4) then they say afraid they are
15- 1) and additional pressure 2) add pressure
3) puts additional pressure 4) and added pressure

PART C: Reading Comprehension

***Directions**: Read the following passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.*

PASSAGE 1:

This article is offered as an example of a probability problem, simple to state, but rich enough to permit a variety of explorations by students with adequate analytical skills in an introductory course in probability and statistics. It involves a discrete random variable originating from the classical occupancy problem. This random variable X is defined to be how many of N elements are selected by or assigned to K individuals when each of the N elements is equally likely to be chosen by or assigned to any of the K individuals. The probability distribution of this random variable is derived utilizing various counting rules, properties of probability, and observing trends. The distribution involves the Stirling numbers of the second kind and some asymptotic results are given. Several interesting applications of this random variable, including a variant of the birthday problem, are described.

16- **What does this passage involve?**
1) A classical problem 2) A rich problem
3) A simple problem 4) A discrete random variable
17- **The elements are ----------.**
1) equally likely 2) similar
3) with different chances 4) selected
18- **The distribution of this random variable is obtained ---------.**
1) by counting 2) by integration
3) by frequencies of elements 4) by observation
19- **The distribution involves ----------.**
1) integers 2) equal numbers
3) only negative numbers 4) the Stirling numbers
20- **An interesting application of this random variable is the ----------.**
1) counting problem 2) birthday problem
3) occupancy problem 4) Pascal's problem

www.isijournal.net

PASSAGE 2:

Assuming a binary outcome, logistic regression is the most common approach to estimating a crude or adjusted odds ratio corresponding to a continuous predictor. We revisit a method termed the discriminant function approach, which leads to closed-form estimators and corresponding standard errors. In its most appealing application, we show that the approach suggests a multiple linear regression of the continuous predictor of interest on the outcome and other covariates, in place of the traditional logistic regression model. If standard diagnostics support the assumptions (including normality of errors) accompanying this linear regression model, the resulting estimator has demonstrable advantages over the usual maximum likelihood estimator via logistic regression. These include improvements in terms of bias and efficiency based on a minimum variance unbiased estimator of the log odds ratio, as well as the availability of an estimate when logistic regression fails to converge due to a separation of data points. Use of the discriminant function approach as described here for multivariable analysis requires less stringent assumptions than those for which it was historically criticized, and is worth considering when the adjusted odds ratio associated with a particular continuous predictor is of primary interest. Simulation and case studies illustrate these points.

21- By logistic regression one can estimate ----------.

1) a continuous variable
2) prediction
3) odds ratio
4) variance

22- The discriminant function approach leads to ----------.

1) closed form estimators
2) linear regression
3) standard errors
4) some application

23- The resulting estimator has an advantage over ----------.

1) Bayes estimator
2) Moment estimator
3) MLE
4) UMVE

24- Stringent assumptions are ----------.

1) strong
2) strict
3) simple
4) straight

25- These points are made clear by ----------.

1) examples
2) data
3) case studies
4) calculation

www.isijournal.net

PASSAGE 3:

Many analogues to the coefficient of determination R^2 in ordinary regression models have been proposed in the context of logistic regression. Our starting point is a study of three definitions related to quadratic measures of variation. We discuss the properties of these statistics, and show that the family can be extended in a natural way by a fourth statistic with an even simpler interpretation, namely the difference between the averages of fitted values for successes and failures, respectively. We propose the name "the coefficient of discrimination" for this statistic, and recommend its use as a standard measure of explanatory power. In its intuitive interpretation, this quantity has no immediate relation to the classical versions of R^2, but it turns out to be related to these by two exact relations, which imply that all these statistics are asymptotically equivalent.

26- What has been proposed?

1) Regression models
2) Logistic distributions
3) Normal variables
4) Many coefficients similar to R^2

27- Quadratic measures of variation are ----------.

1) given
2) studied
3) proposed
4) defined

28- What name is given to the fourth statistic?

1) Between averages
2) Grand mean
3) Fitted value
4) coefficient R^2

29- The use of the coefficient of discrimination is recommended as a ----------.

1) standard measure
2) poor measure
3) new measure
4) false measure

30- These statistics are ----------.

1) unbiased
2) asymptotically equivalent
3) similar
4) equivalent

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم‌ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی، مبانی آنالیزریاضی، مبانی آنالیزعددی و مبانی احتمال):

ریاضیات عمومی:

۳۱- مقدار $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{2\sqrt[3]{n^2}}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$

۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{1}{3}$

www.isijournal.net

۳۲- اگر $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}$ و $B=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1.2.3....n}{3.5.7....(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$، کدام گزینه درست است؟

۱) سری A همگرا و سری B واگراست.

۲) سری A واگرا و سری B همگراست.

۳) هر دو سری همگرا هستند.

۴) هر دو سری واگرا هستند.

۳۳- مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-e^{-\frac{a^2x^2}{2}}}{x^4}$، که در آن a عدد ثابت است، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{12}a^4$

۲) $-\frac{a^4}{8}$

۳) $\frac{a^4}{8}$

۴) $\frac{1}{12}a^4$

۳۴- فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[1,\infty)$ باشد، که $f(1)=1$ و $f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}$. کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f کران‌دار است و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود نیست.

۲) تابع f بی‌کران است و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود نیست.

۳) $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

۴) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود و متناهی است.

۳۵- طول منحنی $r=\sin^3\frac{\theta}{3}$ در دستگاه مختصات قطبی، کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$

۲) $\frac{2\pi}{3}$

۳) $\frac{3\pi}{4}$

۴) $\frac{3\pi}{2}$

مؤسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۳۶- تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

مقدار $D_{\vec{u}}f(0,0)$ به ازای $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}j$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\sqrt{2}$

۳۷- مقدار انتگرال $\int_0^1\int_0^{1-x}e^{\frac{y}{x+y}}dy\,dx$، کدام است؟

۱) $e-1$

۲) $e+1$

۳) $\frac{e-1}{2}$

۴) $\frac{e+1}{2}$

۳۸- اگر D ناحیهٔ محصور بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$، $x^2+y^2=4$، مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحهٔ $z=1$ باشد، مقدار انتگرال $\iiint_D\frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) 2π

۳) $\frac{3\pi}{2}$

۴) π

۳۹- فرض کنید $\vec{F}=\left[x^2y^3+y-\cos(x^3)\right]\vec{i}+\left[x^3y^2+\sin(y^3)+x\right]\vec{j}+z\vec{k}$ و C دایرهٔ $x^2+y^2=1$ در جهت راست‌گرد در صفحهٔ $z=0$ باشد، مقدار $\int_C\vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

مبانی علوم ریاضی:

۴۰- نقیض گزاره مقابل کدام است؟ «اگر حاصل‌ضرب دو عدد صفر باشد حداقل یکی از آن دو عدد صفر است»

۱) $\exists a\ \exists b \quad ab=0$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$

۲) $\exists a\ \exists b \quad ab\neq 0$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$

۳) $\exists a\ \exists b \quad ab=0$ یا $a=0$ یا $b=0$

۴) $\exists a\ \exists b \quad ab\neq 0$ یا $a\neq 0$ یا $b\neq 0$

۴۱- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $A\notin P(B)$ و $B\in P(C)$ آنگاه $A\notin P(C)$

۲) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$ آنگاه $A\in C$

۳) $P(A-B)-\{\varnothing\}\subseteq P(A)-P(B)$

۴) اگر $x\in A$ و $A\not\subseteq B$ آنگاه $x\notin B$

۴۲- فرض کنید $A\subseteq X$. تابع $\chi_A : X\to\{0,1\}$ با ضابطهٔ تعریف $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$، تابع مشخصهٔ A نامیده می‌شود، اگر تحدید تابع χ_A به زیر مجموعه‌ای از X مانند B تابعی ثابت باشد، آن‌گاه:

۱) $B=A$

۲) $B\cap A'=\varnothing$

۳) $B\cap A=\varnothing$

۴) $B\subseteq A$ یا $B\subseteq A'$ (A' متمم A است)

۴۳- تابع $f : X\to Y$ مفروض است. افراز $P=\left\{f^{-1}(\{y\})\,|\,f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing, y\in Y\right\}$ از مجموعه X را در نظر بگیرید. اگر رابطه هم ارزی ناشی از P را با X/P نمایش دهیم، در این صورت X/P کدام است؟

۱) $\{(a,b)\in X\times X\,|\,a=b\}$

۲) $\{(a,b)\in X\times X\,|\,f(a)=f(b)\}$

۳) $\left\{(a,b)\in X\times X\,|\,f^{-1}(\{f(a)\})=b\right\}$

۴) $\left\{(a,b)\in X\times X\,|\,a=f^{-1}(\{f(b)\})\right\}$

۴۴- اگر $f : X\to Y$ یک تابع باشد و $A\subseteq X$ و $B\subseteq Y$، آنگاه کدام گزینه ممکن است، برقرار نباشد؟

۱) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$

۲) $A\subseteq f^{-1}(f(A))$

۳) $f^{-1}(f(A))\subseteq A$

۴) $f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۴۵- فرض کنید A بازهٔ $(0,1)$ است. عدد اصلی A^A با عدد اصلی کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر نیست؟

۱) $(0,1)^{\mathbb{R}}$

۲) $P(\mathbb{R})$

۳) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

۴) $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۴۶- کدام‌یک از ماتریس‌های زیر را می‌توان به حاصل‌ضربی از ماتریس‌های مقدماتی تجزیه کرد؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴۷- معادلهٔ $2XY^2 - YXY - Y^2X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، چند جواب (X, Y) در ماتریس‌های حقیقی 2×2 دارد؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) نامتناهی

۴۸- اگر $T : M_4(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(A) = A^t + A$ باشد، آنگاه رتبه T چند است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۴۹- فرض کنید A یک ماتریس ۱۰×۱۰ حقیقی است، که دارای یک زیرماتریس تماماً صفر $r\times s$ است، و سایر درایه‌های A همگی ناصفرند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $r+s=۹$ آنگاه $\det A\neq ۰$

۲) اگر $r+s=۱۰$ آنگاه $\det A=۰$

۳) اگر $r+s=۱۱$ آنگاه $\det A=۰$

۴) اگر $r+s=۱۰$ آنگاه $\det A\neq ۰$

۵۰- فرض کنید $A\in M_۴(\mathbb{C})$ به‌طوری‌که $\det(A)=۱$ و $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^{-۱})=۰$. کدام گزاره صحیح است؟

۱) $A^۲=I$

۲) $A^۲+A+I$ معکوس‌پذیر نیست.

۳) $A^۳=A+I$

۴) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$

۵۱- فرض کنید A ماتریسی ۲۰×۲۰ با درایه‌های حقیقی بوده که عناصر روی قطر آن همگی صفر هستند، و سایر درایه‌ها $+۱$ یا -۱ هستند، و در ضمن تعداد ۱ ها و -۱ ها برابرند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\operatorname{rank}(A)\leq ۹$

۲) $\operatorname{rank}(A)=۱۰$

۳) $\operatorname{rank}(A)=۱۹$

۴) $\operatorname{rank}(A)=۲۰$

مبانی آنالیز ریاضی:

۵۲- فرض کنید S و T دو زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشند، و ∂S مرز مجموعه S باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\partial(S\cup T)\subseteq \partial S\cup \partial T$

۲) $\partial(S\cup T)=\partial S\cup \partial T$

۳) $\partial(S\times T)=\partial S\times \partial T$

۴) $\partial S\cup \partial T\subseteq \partial(S\cup T)$

۵۳- کدام گزینه درست است؟

۱) اشتراک دنباله نزولی از مجموعه‌های بسته ناتهی است.

۲) اگر $A\subseteq \mathbb{R}$ فشرده باشد آنگاه $\overline{A^{\circ}}$ نیز فشرده است.

۳) هر مجموعه بسته از اعداد حقیقی شامل ماکزیمم و می‌نیمم خود هست.

۴) هر زیر مجموعهٔ شمارای نامتناهی و کراندار از اعداد حقیقی فشرده است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۵۴- فرض کنید $(x_n)_n$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد، که در $\mathbb{R}$ چگال است. کدام گزینه درست است؟

۱) دنبالهٔ $(x_n)_n$ می‌تواند همگرا باشد.

۲) مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای $(x_n)_n$ حداکثر شمارا است.

۳) دنباله $(x_n)_n$ دارای هیچ زیر دنباله همگرا به اعداد اصم نیست.

۴) $\limsup_n x_n = +\infty$ و $\liminf_n x_n = -\infty$

۵۵- مقدار $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{e}$

۲) ۱

۳) $e-1$

۴) e

۵۶- کدام‌یک از توابع زیر روی $[0,\infty)$، پیوستهٔ یکنواخت است؟

۱) $f(x)=x^3$

۲) $f(x)=x^2\cos x$

۳) $f(x)=\frac{\cos x}{5+x^4}$

۴) $f(x)=(\sin x)\sqrt{x}$

۵۷- فرض کنید $M=\{x\in\mathbb{R}: x^2\le 2\}\cap\mathbb{Q}$، که $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا است. کدام گزینه در مورد M درست است؟

۱) در $\mathbb{R}$ بسته است.

۲) در $\mathbb{R}$ باز است.

۳) در $\mathbb{Q}$ هم باز و هم بسته است.

۴) در $\mathbb{Q}$ نه باز است و نه بسته

۵۸- فرض کنید $f: I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر I یک زیر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ در $\mathbb{R}$ کراندار است.

۲) اگر I یک بازه باز در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ یک بازه در $\mathbb{R}$ است.

۳) اگر I یک بازه کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ نیز یک بازه کراندار است.

۴) اگر I یک زیر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۵۹- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر به ازای هر مجموعه $A\subseteq\mathbb{R}$ رابطه $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ برقرار باشد آنگاه f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲) اگر $A\subseteq\mathbb{R}$ و به ازای هر زیر مجموعه فشرده C از A تابع f روی C پیوسته باشد آنگاه f روی A پیوسته است.

۳) اگر $G_i\subseteq\mathbb{R}$ها باز باشند و تابع روی هر G_i پیوسته باشد آنگاه f روی $\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$ نیز پیوسته است.

۴) اگر $F_i\subseteq\mathbb{R}$ها بسته باشند و تابع f روی هر F_i پیوسته باشد آنگاه f روی $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ نیز پوسته است.

۶۰- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، کدام گزینه پیوستگی f را نتیجه می‌دهد؟

۱) یکنوا با برد همبند باشد.

۲) یک به یک با برد همبند باشد.

۳) یک به یک و پوشا باشد.

۴) با برد همبند و خاصیت مقدار میانی باشد.

۶۱- فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، و برای هر $t,s\in[0,1]$، $tf(s)+sf(t)\le 2$.

اگر $A=\int_0^1 f(x)dx$، کدام گزینه درست است؟

۱) $A\ge\frac{\pi}{4}$

۲) $A\le\frac{\pi}{2}$

۳) $-\frac{\pi}{4}\le A\le\frac{\pi}{4}$

۴) هیچ کران بالا یا پایینی برای A وجود ندارد.

۶۲- هرگاه تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

۱) مشتق f حداکثر در دو نقطه صفر است و f یکنواست.

۲) مشتق f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و f اکیداً یکنواست.

۳) $f'(x)>0$ برای هر x و f اکیداً صعودی است.

۴) مشتق f همواره صفر است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۶۳- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$ همگرا است.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا است.

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n$ همگرا است.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ واگرا است.

مؤسسه تحقیقاتی آرمان

مبانی آنالیز عددی:

۶۴- فرض کنید هر عدد حقیقی x دارای نمایش به صورت $\pm(0/a_1a_2a_3)_2 \times 2^e$ در مبنای ۲ است، که $a_1 \neq 0$ و $-1 \leq e \leq 2$. M بزرگترین عدد قابل نمایش، و T بزرگترین عدد منفی قابل نمایش، کدام هستند؟

۱) $T = -\frac{1}{4}$, $M = 7$

۲) $T = -\frac{1}{4}$, $M = \frac{7}{2}$

۳) $T = -\frac{7}{2}$, $M = \frac{7}{2}$

۴) $T = -\frac{1}{8}$, $M = 7$

۶۵- فرض کنید f مشتقات پیوسته مرتبه دوم دارد، و $\forall x \in (0,1)$, $|f''(x)| < 1$. اگر تابع f به صورت خطی در $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ تقریب زده شود، آنگاه کران بالا برای خطای این تقریب در بازه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۱

www.isijournal.net

۶۶- فرض کنید به ازای یک مقدار ثابت c، $f(x)=\frac{۱}{x+c}$. در این صورت $f[x_۰,x_۱,...,x_n]$، برابر است با ....

۱) ۰

۲) $\frac{(n+۱)!(-۱)^n}{(x_۰+c)(x_۱+c)...(x_n+c)}$

۳) $\frac{n!(-۱)^n}{(x_۰+c)(x_۱+c)...(x_n+c)}$

۴) $\frac{(-۱)^n}{(x_۰+c)(x_۱+c)...(x_n+c)}$

۶۷- رابطه تکراری $x_{k+۱}=\sqrt{x_k+۲}+(x_k-۲)\ ,\ k=۰,۱$، به ازای .... است.

۱) $x_۰\neq ۲$ واگرا

۲) $x_۰\neq ۲$ همگرای مرتبه دوم

۳) $x_۰<۲$ همگرای خطی

۴) $x_۰>۲$ همگرای خطی

۶۸- روش زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \approx w_۱f(\frac{\pi}{۲})+w_۲f(-\frac{\pi}{۲})$$

مقادیر $w_۱$ و $w_۲$ چقدر باشند تا فرمول بالا برای توابع $\sin x$ و $\cos x$، مقدار دقیق انتگرال را به دست ندهد؟

۱) $w_۱=w_۲=۱$

۲) $w_۱=w_۲=۲$

۳) $w_۲=۰\ ,\ w_۱=-۲$

۴) $w_۱=w_۲=\frac{\pi}{۲}$

۶۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر A ماتریس متقارن باشد، آنگاه $A^۲$ تجزیه چولسکی یگانه دارد.

۲) اگر A ماتریس معین مثبت متقارن باشد، آنگاه تجزیه چولسکی A وجود دارد.

۳) اگر A در دستگاه $Ax=b$ معین مثبت باشد، آنگاه دستگاه مزبور جواب یگانه دارد.

۴) ماتریس همانی I_n به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، معین مثبت است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

مبانی احتمال:

۷۰- عدد ۲۴ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع ۴ عدد بیان کرد که همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{۷}{۴}$

۲) $\binom{۸}{۳}$

۳) $\binom{۱۱}{۳}$

۴) $\binom{۱۱}{۴}$

۷۱- سه نامه به صورت تصادفی به سه آدرس مجزا ارسال می‌شوند. احتمال این که هیچ کدام از نامه‌ها به آدرس صحیح نرسد، برابر است با:

۱) $\frac{۲}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۲۷}$

۳) $\frac{۱}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۳}$

۷۲- احتمال مرگ غیرطبیعی برای مردان مسن سیگاری، سه برابر احتمال مرگ غیرطبیعی برای مردان مسن غیرسیگاری است. اگر ۱۰ درصد از مردان مسن سیگاری باشند، احتمال اینکه مردانی که مرگ غیرطبیعی دارند، سیگاری باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۷۳- سیستمی با ۵ جزء را در نظر بگیرید، که مستقل از هم کار می‌کنند. اگر احتمال فعال بودن این اجزا به ترتیب برابر p و ۲p و ... و ۵p باشد، و سیستم تا زمانی که حداقل ۴ جزء آن فعال است، به فعالیت خود ادامه دهد، احتمال فعال بودن سیستم کدام است؟ ($p < \frac{۱}{۵}$)

۱) $۲۷۴p^۴ - ۶۰۰p^۵$

۲) $۱۲۰p^۵ + ۲۷۴p^۴$

۳) $۱۲۰p^۵ + ۲۵۰p^۴$

۴) $۲۷۴p^۴ - ۴۸۰p^۵$

۷۴- معمولاً ۷۵٪ از خبرهای شبکه A صحیح بوده، در حالی‌که این درصد برای شبکه B برابر ۸۰٪ است. در چند درصد از خبرها، این دو شبکه با هم مغایر هستند؟

۱) ٪۵

۲) ٪۲۵

۳) ٪۳۵

۴) ٪۴۵

۷۵- از بین n زوج متأهل دو نفر را به تصادف و بی‌درپی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو نفر انتخاب شده زن و شوهر باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲(۲n-۱)}$

۲) $۱-\frac{۱}{n}$

۳) $\frac{۱}{۲n-۱}$

۴) $۱-\frac{۱}{۲n}$

دروس تخصصی (احتمال، آماریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱):

۷۶- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$ باشد. مقدار $\mathrm{cov}(I_{(X>۱)}, I_{(X<۲)})$، کدام است؟ ($I_A$ تابع نشانگر است.)

۱) $e^{-\lambda}(e^{-۲\lambda} - ۱)$

۲) $e^{-\lambda}(۱ - e^{-۲\lambda})$

۳) $e^{-۲\lambda}(e^{-\lambda} - ۱)$

۴) $e^{-۲\lambda}(۱ - e^{-\lambda})$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۷۷- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از هم با گشتاور دوم متناهی، و $EX=-EY=1$ باشد. مقدار $Cov(X+Y,XY)$، کدام است؟

۱) صفر

۲) $Var(Y)-Var(X)$

۳) $Var(X)+Var(Y)$

۴) $Var(X)-Var(Y)$

۷۸- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع برنولی با $p=\frac{1}{2}$، و Y یک متغیر تصادفی مستقل از X با تابع توزیع F باشد. تابع توزیع $Z=X+Y$ کدام است؟

۱) $F(x+1)$

۲) $F(x-1)$

۳) $\frac{1}{2}F(x+1)+\frac{1}{2}F(x)$

۴) $\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2}F(x-1)$

۷۹- یک نمونه تصادفی ۲ تایی از یک جامعه را در نظر بگیرید. احتمال این که مشاهده سومی از این جامعه مستقل از مشاهدات قبلی در سمت چپ کوچکترین مشاهده نمونه دوتایی قرار گیرد، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{4}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{1}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

۸۰- اگر X_1 و X_2 یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال $P[X=k]=pq^k$, $k=0,1,2,...$ باشد، مقدار $P\left[\frac{X_1}{1+X_2}\geq 1\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{1+p}$

۲) $\frac{1}{1+q}$

۳) $\frac{p}{1+p}$

۴) $\frac{q}{1+q}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۸۱- فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f(x)=e^{-x}, x>0$ باشد. مقدار $E\left(e^{-[X]}\right)$ کدام است؟ ($[x]$ جز صحیح x می‌باشد)

۱) $\frac{1}{1+e}$

۲) $\frac{1}{e-1}$

۳) $\frac{e}{e+1}$

۴) $\frac{e-1}{e+1}$

۸۲- فرض کنید X دارای تابع توزیع (تجمعی) زیر باشد. توزیع $Y=\exp\left[-\frac{X}{\beta}\right]$ کدام است؟

$$F(x)=\exp\left[-e^{-\frac{(x-\alpha)}{\beta}}\right], \quad -\infty<x<+\infty$$

۱) نمایی با میانگین $e^{-\frac{\alpha}{\beta}}$

۲) نمایی با میانگین $e^{\frac{\alpha}{\beta}}$

۳) نمایی با میانگین $e^{-\alpha}$

۴) نمایی با میانگین e^{α}

۸۳- فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. تابع مولد گشتاور $Y=\prod_{i=1}^{n} X_i$ برابر است با:

۱) $1-e^t(1-p)^n$

۲) $1-p^n+e^tp^n$

۳) $1-(1-p)^n+e^tp^n$

۴) $1-(1-p)^n+e^t(1-p)^n$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۸۴- اگر $X_1,\dots,X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد، واریانس بُرد برابر است با:

$$P(X=-1)=p\ ,\ P(X=1)=q$$

۱) p^n+q^n

۲) p^nq^n

۳) $1-(p^n+q^n)$

۴) $4(p^n+q^n)(1-p^n-q^n)$

۸۵- اگر $X_1, X_2\dots$ دنباله‌ایی از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع مشترک برنولی با پارامتر p $(0<p<1)$ و $Y_n=\prod_{i=1}^{n} X_i\ ,\ n\geq 1$ باشند، مقدار $E(Y_nY_m)$ برای $m>n$، کدام است؟

۱) p^n

۲) p^{m-n}

۳) p^m

۴) p^{mn}

۸۶- فرض کنید X و Y به ترتیب نمرات میان‌ترم و نهایی دانشجویان یک کلاس دارای توزیع توأم نرمال با میانگین‌های $\mu_x=\mu_y=70$ و واریانس‌های $\sigma_x^2=\sigma_y^2=25$، و ضریب همبستگی $\rho=0/8$ باشند. احتمال این که دانشجویی که در امتحان میان ترم نمره ۸۰ گرفته، در امتحان پایان ترم (نهایی) از میانگین بیشتر بگیرد، چقدر است؟ (Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است)

۱) $\Phi(\frac{4}{3})$

۲) $1-\Phi(\frac{4}{3})$

۳) $\Phi(\frac{8}{3})$

۴) $1-\Phi(\frac{8}{3})$

۸۷- فرض کنید $X\sim N(0,1)$ و $Y\mid X=x\sim N(3x-2\ ,\ 16)$ باشند. ضریب همبستگی X و Y کدام است؟

۱) $\frac{1}{5}$

۲) $\frac{2}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$

۴) $\frac{4}{5}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۸۸- اگر X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی و میانگین ν^{-1} باشند، آنگاه $\mathrm{Var}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{12}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{1}{2}$

۸۹- اگر $X_1,\ldots,X_5$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه $(1,3)$ باشد، مقدار $\mathrm{Var}(X_{(4)}-X_{(2)})$ کدام است؟

۱) $\frac{16}{147}$

۲) $\frac{8}{63}$

۳) $\frac{16}{21}$

۴) $\frac{4}{3}$

۹۰- اگر X_1,X_2,X_3 یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. مقدار $P[X_1 \le X_2 \le X_3]$ کدام است؟

$$P[X=k]=(1-\theta)\theta^k,\ k=0,1,2,\ldots \qquad \theta\in(0,1)$$

۱) $\frac{(1-\theta)^2}{(1-\theta^2)(1-\theta^3)}$

۲) $\frac{\theta^2}{(1-\theta^2)(1-\theta^3)}$

۳) $\frac{\theta(1-\theta)}{(1-\theta^2)(1-\theta^3)}$

۴) $\frac{(1-\theta)^3}{(1-\theta^2)(1-\theta^3)}$

۹۱- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع نامنفی باشند. مقدار $E(X\mid X+Y=a)$ کدام است؟

۱) $\frac{a}{3}$

۲) $\frac{a}{2}$

۳) a

۴) $2a$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۹۲- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع برنولی با پارامتر p باشند. امید ریاضی متغیر تصادفی $Z=(1-XY)^3$، کدام است؟ $(q=1-p)$

۱) p

۲) q

۳) p^2q

۴) $1-p^2$

۹۳- فرض کنید X_1,X_2,X_3 یک نمونه تصادفی سه تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، مقدار $P(\max\{X_1,X_3\}\le X_2)$، کدام است؟ $f(x)=\theta x^{\theta-1},\theta>0,x\in(0,1)$

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{\theta}{\theta+1}$

۴) $\frac{\theta}{2+\theta}$

۹۴- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. آماره $\frac{1-\min(X_1,...,X_n)}{\max(X_1,...,X_n)}$ در احتمال، به کدام مقدار همگراست؟

۱) صفر

۲) ۱

۳) $\frac{q}{p}$

۴) $\frac{p}{q}$

۹۵- فرض کنید $X_1, X_2,...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از $U(0,1)$ باشند. اگر $U_n=nX_{(1)}$ باشد. توزیع حدی U_n کدام است؟

۱) $E(1)$

۲) $N(0,1)$

۳) $\chi^2_{(1)}$

۴) $\chi^2_{(2)}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۹۶- فرض کنید $X_1,...,X_n$ متغیرهایی تصادفی مستقل از هم باشند. اگر $X_i \sim U(i\theta,(i+1)\theta)$ ، $i=1,2,...,n$ باشد. برآورد گشتاوری θ کدام است؟

۱) $2\overline{x}$

۲) $2\overline{x}-1$

۳) $2\overline{x}-(n+1)$

۴) $\frac{2\overline{x}}{n+2}$

۹۷- اگر x مشاهده‌ای از تابع چگالی احتمال زیر باشد، برآورد ML، پارامتر θ کدام است؟

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1} \quad , \quad 0<x<1 \quad , \quad \theta\in\{1,2\}$$

۱) $\hat{\theta}=-\ln x$

۲) $\hat{\theta}=-\frac{1}{\ln x}$

۳) $\hat{\theta}=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<\frac{1}{2}\\ 2 & , \quad \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$

۴) $\hat{\theta}=\begin{cases}2 & , \quad 0<x<\frac{1}{2}\\ 1 & , \quad \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$

۹۸- فرض کنید $Y_1,...,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پواسن با پارامتر λ باشند. اطلاعاتی که در مورد Y_i ها داریم، آن است که یا صفرند یا غیرصفر. اگر تعریف کنیم $X_i=\begin{cases}1 & \text{اگر } Y_i \text{ صفر باشد}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$، برآورد ML پارامتر λ بر اساس X_i ها، کدام است؟

۱) $-\ln\overline{x}$

۲) $\ln\overline{x}$

۳) $\overline{x}$

۴) $e^{-\overline{x}}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۹۹- فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع از تابع چگالی احتمال زیر باشند،

$$f(x;\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}e^{-x^{\alpha}} \quad ; \quad x>0 \ , \ \alpha>0$$

کدام یک از آماره‌های زیر، یک آمارهٔ فرعی است؟

۱) $X_1 X_2$

۲) $\frac{X_1}{X_2}$

۳) $\ln(X_1)\ln(X_2)$

۴) $\frac{\ln(X_1)}{\ln(X_2)}$

۱۰۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه تصادفی از توزیع $P(\lambda)$ باشد. مقدار $\left(E(\sum_{i=1}^{n}X_i \mid X_1), E(X_1 \mid \sum_{i=1}^{n}X_i)\right)$، کدام است؟

۱) $(\bar{X} \ , \ \bar{X})$

۲) $(n\lambda \ , \ \bar{X})$

۳) $\left(\bar{X} \ , \ X_1+(n-1)\lambda\right)$

۴) $\left(X_1+(n-1)\lambda \ , \ \bar{X}\right)$

۱۰۱- فرض کنید $X_1, X_2,..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل وهم توزیع با توزیع نمایی منفی با میانگین θ باشند. اگر $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ باشد، $E(S^2 \mid \bar{x})$ کدام است؟

۱) θ^2

۲) $\bar{x}^2$

۳) $\overline{x^2}$

۴) $\frac{n\bar{x}^2}{n+1}$

۱۰۲- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت روی فاصلهٔ $(0,\theta)$ باشد، اگر $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $X_{(1)},...,X_{(n)}$ نمایانگر آماره‌های ترتیبی نمونهٔ تصادفی فوق باشند، مقدار $E\left[\frac{\bar{X}}{X_{(n)}} \mid X_{(n)}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) ۱

۳) $\frac{n+1}{2n}$

۴) $\frac{\theta}{2X_{(n)}}$

مؤسسه تحقیقاتی آمار

www.isijournal.net

۱۰۳- بر اساس یک نمونهٔ تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر، چه توابعی از λ دارای برآوردگر نااریب هستند که واریانس آن با کران پایین کرامر - رائو برابر است؟

$$f_\lambda(x)=\frac{\lambda^3 x(x+1)}{\lambda+2}e^{-\lambda x} \quad , x>0 \ , \ \lambda>0$$

۱) $\frac{\lambda+3}{\lambda(\lambda+2)}$

۲) $\frac{\lambda(\lambda+2)}{\lambda+3}$

۳) $\frac{\lambda(\lambda+3)}{\lambda+2}$

۴) $\frac{\lambda+2}{\lambda(\lambda+3)}$

۱۰۴- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع توزیع زیر باشد:

$$F(x;\ \theta)=(1-e^{-x})^\theta \ , \ x>0 \ , \ \theta>0$$

اگر قرار دهیم $S(\underset{\sim}{x})=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-x_i})$، UMVUE پارامتر $\frac{1}{\theta}$ کدام است؟

۱) $\frac{n}{S(\underset{\sim}{X})}$

۲) $\frac{S(\underset{\sim}{X})}{n}$

۳) $[S(\underset{\sim}{X})]^{\frac{1}{n}}$

۴) $[S(\underset{\sim}{X})]^n$

۱۰۵- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^2)$ (σ معلوم) باشد. UMVUE پارامتر $\gamma(\mu)=e^{t\mu}$ که در آن t مقدار ثابت و معلوم است، کدام است؟

۱) $e^{t\bar{X}-t^2\sigma^2/n}$

۲) $e^{t\bar{X}+t^2\sigma^2/2n}$

۳) $e^{t\bar{X}-t^2\sigma^2/2n}$

۴) $e^{t\bar{X}+t^2\sigma^2/n}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۰۶- تک مشاهده X دارای تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)=\frac{\theta}{x^{\theta+1}}\ ,\ x>1\ ,\ \theta>0$ است. اگر فاصله تصادفی $(\frac{1}{\ln X}\ ,\ \frac{2}{\ln X})$ یک فاصله اطمینان برای θ باشد، ضریب اطمینان چقدر است؟

۱) e^{-1}

۲) e^{-2}

۳) $\frac{1}{2}e^{-1}$

۴) $e^{-1}-e^{-2}$

۱۰۷- در یک نمونهٔ تصادفی به اندازهٔ $n=4$، آمارهٔ ترتیبی چهارم Y_4 را از توزیع یکنواخت $(0,\theta)$ داریم. می‌خواهیم $0<C_1<C_2\leq 1$ را چنان انتخاب کنیم که $P\left[C_1\theta<Y_4<C_2\theta\right]=0/95$.
کدام زوج مقدارهای (C_1,C_2)، می‌توانند در این شرط صدق کنند؟

۱) $(0/05\ ,\ 1)$

۲) $(\sqrt{0/05}\ ,\ 1)$

۳) $(0/7\ ,\ 1)$

۴) $(\sqrt[4]{0/05}\ ,\ 1)$

۱۰۸- فرض کنید $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ به ترتیب کوچکترین و بزرگترین آمارهٔ ترتیبی برای یک نمونهٔ تصادفی n تایی از توزیع یکنواخت روی فاصلهٔ $(\theta-\frac{1}{2}\ ,\ \theta+\frac{1}{2})$ باشد. کمترین مقدار n، برای اینکه $(X_{(1)},X_{(n)})$ یک فاصله اطمینان حداقل ۹۹ درصدی برای θ باشد، کدام است؟

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۱۰

۴) ۱۵

۱۰۹- می‌خواهیم بر اساس یک مشاهده $0<x<1$، فرض تابع چگالی احتمال $f(x)=6x^5$ را در برابر $g(x)=3x^2$ بیازمائیم. اگر خطای نوع اول $\frac{1}{64}$ باشد، با کدام مشاهده، فرض اول رد می‌شود؟

۱) $x=\frac{1}{8}$

۲) $x=\frac{1}{3}$

۳) $x=\frac{7}{8}$

۴) $x=\frac{2}{3}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۱۰- فرض کنید X تک مشاهده‌ای از تابع چگالی احتمال $f(x,\theta)=\theta x^{\theta-1}, \circ<x<1, \theta>\circ$ باشد، و ناحیه بحرانی آزمون آماری $\begin{cases} H_\circ:\theta=۲ \\ H_۱:\theta=۱ \end{cases}$ به صورت $X<C$ (C ثابت) باشد. به ازای چه مقداری از C، مجموع اندازه‌های خطای نوع اول و دوم یعنی $\alpha+\beta$ می‌نیمم می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۴}$

۲) ۱

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۱۱- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع توزیع زیر باشد. آماره MLR برای این خانواده از توزیع‌ها کدام است؟

$$F(x,\theta)=(۱-e^{-x})^{\theta} \quad x>\circ,\theta>\circ$$

۱) $\sum_{i=۱}^{n} x_i$

۲) $\sum_{i=۱}^{n} \ln x_i$

۳) $\sum_{i=۱}^{n} \ln(۱-e^{-x_i})$

۴) $\sum_{i=۱}^{n} (۱-e^{-x_i})$

۱۱۲- فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند، که در آن X_i، $i=۱,\ldots,n$، دارای توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_{X_i}(x)=e^{\theta_i-x}, x>\theta_i$ باشد. برای آزمون فرض $H_\circ:\theta_۱=\theta_۲=\ldots=\theta_n$ در برابر $H_۱:\theta_i\neq\theta_j$، برای حداقل یک $i\neq j$، ناحیه بحرانی آزمون نسبت درستنمایی به اندازهٔ α، کدام است؟

۱) $\Sigma(X_i-X_{(۱)})>\chi^۲_{(۲n-۲,\alpha)}$

۲) $\Sigma(X_i-X_{(۱)})>\frac{۱}{۲}\chi^۲_{(۲n-۲,\alpha)}$

۳) $\Sigma(X_i-X_{(۱)})>\frac{۱}{۲}\chi^۲_{(۲n,\alpha)}$

۴) $\Sigma(X_i-X_{(۱)})>\chi^۲_{(۲n,\alpha)}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۱۳- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای جدول احتمال زیر باشد:

x	$\theta=1$	$\theta=2$	$\theta=3$
۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
۱	$\frac{1}{8}$	۰	$\frac{1}{2}$
۲	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
۳	$\frac{1}{8}$	۰	۰

برای آزمون $H_0:\theta=1$ در مقابل $H_1:\theta\neq 1$، به اندازهٔ ۰/۱۲۵، تابع آزمون به روش نسبت درستنمایی، کدام است؟

۱) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$

۲) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\neq 1\end{cases}$

۳) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x=2\\ 0 & x\neq 2\end{cases}$

۴) $\varphi(x)=\begin{cases}1 & x=3\\ 0 & x\neq 3\end{cases}$

۱۱۴- اگر متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x;\theta)=\frac{e^{x-\theta}}{\left(1+e^{x-\theta}\right)^2}\ ,\ -\infty<x<\infty\ ,\ -\infty<\theta<\infty$$

ناحیه بحرانی آزمون UMP در سطح α، برای آزمون فرض $H_0:\theta\geq 0$ در مقابل $H_1:\theta<0$، کدام است؟

۱) $\left\{x:x<\log\frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$

۲) $\left\{x:x>\log\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}$

۳) $\left\{x:x<\log\frac{\alpha}{1-\alpha}\right\}$

۴) $\left\{x:x>\log\frac{1-\alpha}{\alpha}\right\}$

موسسه تحقیقات آرمان

www.isijournal.net

۱۱۵- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} \quad , 0 < x < 1, \theta > 0$$

در آزمون $H_0: \theta \geq 2$ در مقابل $H_1: \theta < 2$، ناحیه بحرانی پرتوان‌ترین آزمون یکنواخت (UMP) به اندازهٔ α، کدام است؟

۱) $\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{x_i} < \chi^2_{(2n, 1-\alpha)}$

۲) $\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{x_i} > \chi^2_{(2n, \alpha)}$

۳) $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i < \chi^2_{(2n, 1-\alpha)}$

۴) $\sum_{i=1}^{n} \ln x_i > \chi^2_{(2n, \alpha)}$

۱۱۶- برای بررسی تعداد غلط‌های تایپی یک کتاب ۱۰۰ صفحه‌ای، ۱۰ صفحه به روش نمونه‌گیری تصادفی ساده و بدون جای‌گذاری از کتاب انتخاب شده و تعداد غلط‌های تایپی هر صفحه به شرح زیر ثبت شده است:

تعداد غلط‌ها	۰	۱	۲	۳	جمع
فراوانی	۵	۳	۱	۱	۱۰

برای برآورد تعداد کل صفحاتی از کتاب که لااقل یک غلط تایپی دارند، کران خطای برآورد با اعتماد ۹۵٪ تقریباً برابر است با: (فرض کنید $P(Z \leq 2) \simeq \Phi(2) \simeq 0/975$)

۱) ۱۶

۲) ۲۴

۳) ۳۲

۴) ۴۸

۱۱۷- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری، اگر y_i, y_j به ترتیب مقادیر صفت موردنظر برای i امین و j امین عضو نمونه باشند، و اگر y_i مقدار i امین عضو جامعه و $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{y})^2$ و $S^2 = \frac{N}{N-1}\sigma^2$ و $\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$ باشد، آنگاه امید ریاضی $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_i - y_j)^2$، برابر است با: ($N$ حجم جامعه و n حجم نمونه است.)

۱) S^2

۲) σ^2

۳) $2n(n-1)S^2$

۴) $2n(n-1)\sigma^2$

www.isijournal.net

۱۱۸- در جامعه‌ای شامل دو طبقه با واریانس‌های S_1^2 , S_2^2، اگر تخصیص نیمن منجر به نمونه‌های هم اندازه از بین طبقات شود، آنگاه w_1 (وزن طبقه اول) برابر است با:

۱) $\frac{S_1}{S_1+S_2}$

۲) $\frac{S_2}{S_1+S_2}$

۳) $\frac{S_1-S_2}{S_1+S_2}$

۴) $\frac{S_2-S_1}{S_1+S_2}$

۱۱۹- جامعه‌ای شامل دو طبقه به ترتیب با وزن‌های w_2, w_1 است. اگر مقدار نسبت صفت موردنظر در این طبقات به ترتیب P_2, P_1 باشد و $P_2 = 2P_1$، در این صورت برای برآورد پارامتر P در کل جامعه، اگر نمونه‌ای به حجم n به روش تصادفی ساده بدون جای‌گذاری از کل جامعه استخراج کنیم، در این صورت مقدار واریانس برآوردگر نااریب P بیشترین مقدار را خواهد داشت، اگر:

۱) $P_1 = \frac{2-w_1}{4}$

۲) $P_1 = \frac{1-w_1}{2-w_1}$

۳) $P_1 = \frac{2-w_1}{2}$

۴) $P_1 = \frac{1}{2(2-w_1)}$

۱۲۰- جامعه‌ای به حجم ۵۰۰ با مشخصات مندرج در جدول زیر به سه طبقه افراز شده است. اگر بخواهیم بر اساس تخصیص نیمن نمونه‌ای به حجم ۱۶۰ از این جامعه استخراج کنیم، کدام عبارت صحیح است؟

شماره طبقه	حجم طبقه	انحراف معیار طبقه
۱	۱۰۰	۱۰
۲	۲۰۰	۲
۳	۲۰۰	۱

۱) باید طبقه اول سرشماری شود و از طبقه سوم، نصف طبقه دوم نمونه بگیریم.

۲) باید طبقهٔ اول سرشماری شود و از طبقهٔ سوم، دو برابر طبقه دوم نمونه بگیریم.

۳) حجم نمونه لازم در طبقات دوم و سوم، دو برابر طبقهٔ اول است.

۴) حجم نمونه لازم در طبقهٔ اول بیشتر از حجم این طبقه است و نمی‌توان تخصیص نیمن را به کار برد.

مرکز تحقیقات رایانه

www.isijournal.net

۱۲۱- جامعه‌ای به دو طبقه به حجم $\frac{N}{۲}$ به‌گونه‌ای افراز شده است، که مقادیر متغیر تحت مطالعه y در آن‌ها کاملاً مشابه هستند. ($y_{۱k} = y_{۲k}$ برای هر $k = ۱,۲,...,\frac{N}{۲}$)، کارایی طرح نمونه‌گیری طبقه‌ای به حجم $\frac{n}{۲}$ از هر طبقه، نسبت به تصادفی ساده به حجم n، برابر است با:

۱) ۱

۲) $\frac{N-۲}{N-۱}$

۳) $\frac{N-۲n}{N-n}$

۴) $\frac{N+n}{N+۲}$

۱۲۲- جامعه‌ای با حجم ۱۰۰ را به L طبقه به گونه‌ای طبقه‌بندی می‌کنیم که واریانس در هر طبقه برابر ۲٫۲ شود. برای برآورد میانگین جامعه، از هر طبقه به روش تخصیص متناسب نمونه‌گیری می‌کنیم. اگر بخواهیم واریانس برآوردگر میانگین نمونه ۰٫۰۱ واریانس طبقات شود، حجم کل نمونه، چقدر باید باشد؟

۱) ۱۰

۲) ۲۲

۳) ۵۰

۴) ۷۸

۱۲۳- در یک نمونهٔ تصادفی ساده بدون جای‌گذاری n تایی از جامعه‌ای به حجم N، متغیر تصادفی I_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. مقدار $Cov(I_i, I_j)$ کدام است؟

$$I_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر عنصر } i \text{ ام جامعه در نمونهٔ } n \text{ تایی انتخاب شود.} \\ ۰ & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

۱) ۰

۲) $\frac{-\sigma^۲}{N-۱}$

۳) $\frac{n}{N^۲}(\frac{N-n}{N-۱})$

۴) $-\frac{n}{N^۲}(\frac{N-n}{N-۱})$

۱۲۴- اگر در نمونه‌گیری تصادفی سادهٔ nتایی از افراد جامعه‌ای N عضوی، بخواهیم مقدار کل صفت موردنظر را فقط در مورد مردان این جامعه برآورد کنیم، گزینه صحیح در برآورد ناریب این پارامتر کدام است؟

۱) مجموع مقادیر صفت موردنظر در مورد مردان واقع در نمونه، تقسیم بر کسر نمونه

۲) N برابر میانگین مقادیر صفت موردنظر در مورد مردان واقع در نمونه است.

۳) تنها در صورتی حاصل می‌شود که مجدداً از بین مردان، نمونه‌گیری نماییم.

۴) به دلیل آنکه تعداد مردان در نمونه حاصل تصادفی است، برآوردگر ناریب وجود ندارد.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۲۵- از جامعه‌ای N عضوی با واریانس معلوم در یک نمونهٔ اولیه به حجم n_1، که به روش تصادفی سادهٔ بدون جای‌گذاری انتخاب شده است، میانگین و واریانس نمونه به ترتیب $\bar{y}_1$، S_1^2 و کران خطای برآورد مقدار کل جامعه $(\sum_{i=1}^{N} y_i)$ برابر d_1 حاصل شده است. اگر بخواهیم کران خطای برآورد نصف شود، حجم نمونهٔ لازم را باید حداقل چقدر در نظر بگیریم؟

۱) $n = \frac{16S_1^2}{d_1^2}$

۲) $n = n_1 + \frac{16d_1^2}{n_1^2}$

۳) $n = \frac{4Nn_1}{N+3n_1}$

۴) $n = \frac{4NS_1^2}{n_1+3N}$

۱۲۶- امید ریاضی مجموع مربعات رگرسیونی (SSR) در یک مدل رگرسیونی به فرم $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$، برابر است با:

۱) $\sigma^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

۲) $\sigma^2 + \beta_1^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

۳) $\sigma^2 \left[1 + \beta_1^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right]$

۴) $\sigma^2 \left[1 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right]$

۱۲۷- فرض کنید بین قیمت کالا (x) و میزان تقاضا (y) یک رابطه خطی ساده با شیب منفی (β_1) وجود دارد. شخصی مدعی است درصورتی که قیمت کالا یک واحد افزایش یابد، آنگاه متوسط تقاضا حداقل سه واحد کاهش می‌یابد. فرض H_0 در مورد ادعای شخص کدام است؟

۱) $\beta_1 \le -3$

۲) $\beta_1 \ge -3$

۳) $E(y) \le -3$

۴) $E(y) \ge -3$

۱۲۸- در مدل رگرسیونی خطی چند گانهٔ $Y = X\beta + \varepsilon$، کدام گزینه در مورد ارتباط بین واریانس‌های $\bar{Y}$، Y_i و $\hat{Y}_i$ صحیح است؟

۱) $var(\bar{Y}_i) \le var(Y_i) \le var(\hat{Y}_i)$

۲) $var(\bar{Y}) \le var(\hat{Y}_i) \le var(Y_i)$

۳) $var(\hat{Y}_i) \le var(Y_i) \le var(\bar{Y})$

۴) $var(\hat{Y}_i) \le var(\bar{Y}) \le var(Y_i)$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۲۹- در مدل رگرسیونی خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \ , \ i = 1,\dots,N$، با ماتریس زیر، کدام گزینه صحیح است؟

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{bmatrix} \quad , \quad (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{31}{177} & -\frac{3}{177} \\ -\frac{3}{177} & \frac{6}{177} \end{bmatrix}$$

۱) $N = 3 \quad \sum x_i^2 = 31$

۲) $N = 177 \quad \sum x_i = 31$

۳) $N = 31 \quad \sum x_i = 177$

۴) $N = 6 \quad \sum x_i^2 = 31$

۱۳۰- در مدل رگرسیونی خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ در صورتی که مقدار ثابت a را در متغیر مستقل x_i ضرب کنیم، کدام گزینه در مورد واریانس $\hat{\beta}_0$ صحیح است؟

۱) واریانس، تغییر نمی‌کند.

۲) واریانس، a^2 برابر می‌شود.

۳) واریانس، a برابر می‌شود.

۴) واریانس، a^{-2} برابر می‌شود.

۱۳۱- دو مدل رگرسیونی خطی ساده زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} E(y_{1j} \mid x_{1j}) = \alpha_1 + \beta_1 x_{1j} & j = 1,2,\dots,n_1 \\ E(y_{2j} \mid x_{2j}) = \alpha_2 + \beta_2 x_{2j} & j = 1,2,\dots,n_2 \end{cases}$$

فرض کنید $\beta_1 \neq \beta_2$، و دو مدل بالا در نقطهٔ x_0 همدیگر را قطع می‌کنند. کدام گزینه در مورد x_0، درست است؟

۱) $x_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$

۲) $x_0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1}$

۳) $x_0 = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2}$

۴) $x_0 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 - \beta_1}$

۱۳۲- در یک مدل رگرسیونی خطی چندگانه $Y = X\beta + \varepsilon$، که در آن $var(\varepsilon) = \sigma^2 I$ است، برای $Cov(\hat{Y}_i, \hat{Y}_j)$ به ازای هر $i \neq j$، کدام گزینه صحیح است؟ (h_{ij} درایه (i,j)ام ماتریس $H = X(X'X)^{-1}X'$ است.)

۱) $h_{ij}\sigma^2$

۲) $h_{ii}\sigma^2$

۳) $(1 - h_{ij})\sigma^2$

۴) $x_i'(X'X)^{-1}\sigma^2$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۳۳- مجموع مربعات رگرسیون برای مدل‌های $y=\beta_0+\beta_1x_1+\varepsilon$ و $y=\beta_0+\beta_2x_2+\varepsilon$ به ترتیب برابر ۱۲/۵ و ۱۸/۵ می‌باشد. اگر $r_{x_1,x_2}=0$، $n=20$ و مجموع مربعات کل یعنی SSY برابر ۱۱۲ باشد، مقدار آمارهٔ آزمون برای آزمون فرض $H_0:\beta_1=\beta_2=0$ در مدل $y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon$، کدام است؟

۱) $\frac{81}{31\times17}$

۲) $\frac{81}{112}$

۳) $\frac{31\times17}{81}$

۴) $\frac{81\times112}{31\times17}$

۱۳۴- در مدل رگرسیونی $Y=X\beta+\varepsilon$ ماتریس $X_{n\times p}$ پر رتبه ستونی و ماتریس $H=X(X'X)^{-1}X'$ است. میانگین درایه‌های روی قطر ماتریس H، کدام است؟

۱) $\frac{n}{p}$

۲) $\frac{p}{n}$

۳) $\frac{(p-1)}{n}$

۴) p

۱۳۵- مدل رگرسیونی زیر شامل یک متغیر مستقل x_1 به داده‌های دو گروه به همراه متغیر کمکی $x_2=\begin{cases}0 & \text{گروه اول}\\ 1 & \text{گروه دوم}\end{cases}$ و متغیر اثر متقابل x_1x_2 برازش شده است.

$$y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i1}x_{i2}+\varepsilon_i \quad , \quad i=1,\dots,n_1+n_2$$

در صورت رد فرض $H_0:\beta_3=0$، کدام گزینه صحیح است؟

۱) عرض از مبدأ در دو گروه، تفاوت معنی‌دار نشان می‌دهد.

۲) متغیر مستقل x_1 در دو گروه، تأثیر معنی‌دار بر میانگین متغیر پاسخ دارند.

۳) میانگین متغیر پاسخ در دو گروه، تفاوت معنی‌دار نشان می‌دهد.

۴) میزان تأثیر متغیر مستقل x_1 بر میانگین متغیر پاسخ، در دو گروه تفاوت معنی‌دار دارد.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

موسسه تحقیقاتی آرمان