www.isijournal.net

437E

437

E

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

عصر جمعه
۹۵/۰۲/۱۷

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ناپیوستهٔ داخل ــ سال ۱۳۹۵

مجموعهٔ ریاضی ــ کد ۱۲۰۸

تعداد سؤال: ۱۳۵ — مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی(انگلیسی)	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی)	۶۰	۷۶	۱۳۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

www.isijournal.net

زبان عمومی و تخصصی(انگلیسی):

PART A: Vocabulary
Directions: Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

1- With the pace of life in Indian metros getting faster by the day, many of the old Indian traditions have fallen into --------- and are no longer practiced.
1) indifference 2) equilibrium 3) abeyance 4) annoyance

2- We thought he was reliable till we realized that he had given us a --------- address.
1) dishonest 2) fake 3) skeptical 4) vulnerable

3- His expression was gloomy at every game; I don't think I saw him smile even when his team --------- a hundred points.
1) scored 2) connected 3) achieved 4) displayed

4- The approaching rain gave us a --------- excuse to escape the boring party.
1) harmless 2) monotonous 3) secret 4) plausible

5- The relationship between the earthworm and the garden is ---------: the garden provides a home for the earthworm, while the earthworm provides manure for the garden and keeps it fertile.
1) impractical 2) symbiotic 3) latent 4) paradoxical

6- When it was discovered that he had been operating as a spy, he was badly --------- in the press as being a traitor.
1) incorporated 2) censured 3) concerned 4) constrained

7- Contemporary research into the origins of DeLong culture indicates that a hunter-gatherer society was established about 2,000 years earlier than was --------- thought.
1) similarly 2) sufficiently 3) previously 4) accurately

8- An attempt was made to ignore this brilliant and irregular book, but in ---------; it was read all over Europe.
1) jeopardy 2) chaos 3) contempt 4) vain

9- He strictly warned him that if he did not take the medicine in time, the pain would not ---------.
1) subside 2) degrade 3) avoid 4) collapse

10- To reduce ---------, the company will no longer mail monthly paper statements to those with access to online statements.
1) fright 2) hesitation 3) conflict 4) waste

PART B: Cloze Passage
Directions: Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Becoming a mother is a major transition, points out clinical psychologist Ann Dunnewold, (11) ---------- in Dallas, Tex., provides support for mothers. New mothers give up autonomy, sleep and relationships (12) ---------- to the relentless needs of a baby. On top of that, they are also expected to be in a constant state of bliss and fulfillment (13) ---------- their new role. "There's a lot of pressure to be the perfect mother, (14) ---------- they're not coping," Leahy-Warren says.

www.isijournal.net

Making matters worse, research that demonstrates the importance of early childhood experiences in determining future success and happiness (15) ---------- on moms to get it right.

11- 1) practices 2) whose practice 3) practicing 4) she practices
12- 1) with tending 2) tend 3) to tend 4) that tend
13- 1) of 2) by 3) in 4) with
14- 1) and they are afraid to say 2) while afraid to say
3) but they say they are afraid of what 4) then they say afraid they are
15- 1) and additional pressure 2) add pressure
3) puts additional pressure 4) and added pressure

PART C: Reading Comprehension
***Directions*: Read the following passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.**

PASSAGE 1:

The most familiar example of a ring is the set Z of the integers with the usual interpretation of addition and multiplication. The logical development of the required properties from a small set of axioms requires a rather long mathematical argument. We ask the reader to take it for granted that the integers satisfy the customary rules. In addition to these general properties, the integers enjoy various other properties that rings in general do not. Some of these are found in the following definitions.

A ring A has a multiplicative identity, denoted by 1, iff A contains a unique element 1 such that $1x = x1 = x$ for every x in A. A ring A is a commutative ring iff $xy=yx$ for every x, y belonging to A. Let A be a ring containing more than one element with a multiplicative identity 1. Then A is said to be a division ring iff $x \neq 0$ implies that there exists a unique y in A such that $xy=yx = 1$. A commutative division ring is known as a field. A ring A contains divisors of zero iff there exist x, y belonging to A with $xy =0$, but $x \neq 0$ and $y \neq 0$. An integral domain is a commutative ring with identity which contains no divisors of zero. The even integers form a ring with no identity and no divisors of zero. The rational numbers, the real numbers, and the complex numbers are examples of fields. Most of our work will be concerned with these fields, but we will give a short discussion at the end of this section concerning less common fields.

We introduce two general families of rings in order to discuss other ring concepts. For each positive integer n, the first of these families consists of the three rings Q_n, R_n and K_n of all $n \times n$ matrices over the rational, the real, and the complex fields, respectively. The second of these families consists of the three rings K[x], R[x], and Q[x] of polynomials in a single indeterminant x over these same three fields.

16- **Which of the following would be the best title for the passage?**
1) The Ring of Integers 2) Ring and Fields
3) Commutative Rings 4) Finite Fields

www.isijournal.net

17- The meaning of the word "customary" in line 4 is closest to ----------.

1) satisfied 2) twisted 3) ordinary 4) corollary

18- Which of the following statements is true?

1) Every field is an integral domain.
2) Every commutative ring is an integral domain.
3) The set of even integers is a ring with identity.
4) All the fields contain a copy of rational numbers.

19- According to the third paragraph of the passage, which of the following statements is true?

1) Every ring belongs to one of the above families.
2) The ring Q[x] is a field.
3) The ring R_n is a commutative ring.
4) K[x] is the ring of polynomials over the complex numbers.

20- Which of the following statements is true?

1) Every ring has the properties of the ring of integers.
2) The ring of integers is a field.
3) The ring of integers contains a zero divisior.
4) The ring of integers is commutative.

PASSAGE 2:

If A, B, and C are elements of a boolean algebra, K, the following properties of the relation $\leq$ hold. (i) $A \leq A$ (reflexivity) (ii) If $A \leq B$ and $B \leq A$, then $A = B$. (antisymmetry) (iii) If $A \leq B$ and $B \leq C$, then $A \leq C$. (transitivity)

A relation satisfying the above mentioned three properties is called a partial order relation, and a set with a partial order on it is called a partially ordered set or poset for short. Not all posets are derived from boolean algebras. A boolean algebra is an extremely special kind of poset. We now determine conditions which ensure that a poset is indeed a boolean algebra. Given a partial order on a set K, we have to find two binary operations that correspond to the meet and join.

An element d is said to be the greatest lower bound of the elements a and b in a partially ordered set if $d \leq a$, $d \leq b$, and x is another element, for which $x \leq a$, $x \leq b$, then $x \leq d$. We denote the greatest lower bound of a and b by $a \wedge b$ (meet). Similarly, we can define the least upper bound and denote it by $\vee$ (join). It follows from the antisymmetry of the partial order relation that each pair of elements a and b can have at most one greatest lower bound and at most one least upper bound.

A lattice is a partially ordered set in which every two elements have a greatest lower bound and a least upper bound. We can now give an alternative definition of a boolean algebra in terms of a lattice: A boolean algebra is a lattice that has universal bounds (that is, elements 0 and 1 such that $0 \leq a$ and $a \leq 1$ for all elements a) and is distributive and complemented (that is, the distributive laws for $\wedge$ and $\vee$ hold, and complements exist). It can be verified that this definition is equivalent to our original one.

21- According to the passage ----------.

1) every boolean algebra is a lattice
2) reflexivity and transitivity are sufficient for the relation, $\leq$ in a poset
3) for every A and B in a lattice, $A \leq B$ or $\leq A$
4) every poset is a boolean algebra

www.isijournal.net

22- Which of the following statements is true?

1) $a \wedge b \leq a$ for every a and b in a lattice L.
2) Every lattice includes universal bounds 0 and 1.
3) Every two elements in a boolean algebra are comparable with respect to $\leq$.
4) In a poset the greatest lower bound of every two elements exists.

23- For every a and b in a boolean algebra ----------.

1) $a \vee b \leq a \wedge b$ 2) $a \wedge b \leq 1$ 3) $a \vee 0 \leq a$ 4) $a \vee b \leq a$

24- According to the passage, the uniqueness of $a \wedge b$ in a boolean algebra is a conclusion of ----------.

1) reflexivity 2) antisymmetry 3) transitivity 4) distributivity

25- If L, P and B stand for the category of all lattices, posets and boolean algebras, respectively, then which one is correct?

1) $L \subseteq P \subseteq B$ 2) $L \subseteq B \subseteq P$ 3) $B \subseteq L \subseteq P$ 4) $P \subseteq L \subseteq B$

PASSAGE 3:

Suppose that (X, M) is a measurable space. If $E \subset X$, the characteristic function X_E of E is defined by $X_E(x) = 1$ if $x \in E$ and $X_E(x) = 0$ if $x \notin E$. A few remarks comparing the construction of Lebesgue and Riemann integrals may be helpful. Let f be a bounded measurable function on $[a, b]$, and for simplicity let us assume that $f \geq 0$. To compute the Riemann integral of f, one partitions the interval $[a,b]$ into subintervals and approximates f from above and below by functions that are constant on each subinterval. To compute the Lebesgue integral of f, one picks a sequence of simple functions that increase to f. In Lebesgue theory, the assumption that f is measurable removes the necessity of considering both upper and lower approximations.

The Lebesgue theory offers two real advantages over the Riemann theory. First, much more powerful convergence theorems, such as the monotone and dominated convergence theorems, are available. This not only yields results previously unobtainable but also reduces the labor in proving classical theorems. Second, a wider class of functions can be integrated. For example, if R is the set of rational numbers in $[0,1]$, X_R is not Riemann integrable, being everywhere discontinuous on $[0,1]$, but it is Lebesgue integrable, and $\int X_R dm = 0$.

26- According to the passage ----------.

1) every Lebesgue integrable function is Riemann integrable
2) there exists a Lebesgue integrable function which is not Riemann integrable
3) Only constant functions are Riemann integrable
4) Riemann integraton is not suitable for functions defined on R^2

27- Which of the following statements is true?

1) Simple functions are not Riemann integrable.
2) Only the increasing functions are Lebesgue integrable.
3) If f is a discontinuous function on $[a,b]$ then f is not Riemann integrable.
4) Every Riemann integrable function is Lebesgue integranle.

28- Which of the followings is closest in meaing to the word "approximates" in line 6?

1) Evaluates 2) Integrates 3) Approaches 4) Computes

www.isijournal.net

29- **According to the definition of the characteristic function and the symbol R in the passage, which of the following is correct?**

1) $X_R(\frac{1}{\sqrt{2}})=1$ 2) $X_R(\sqrt{2})=0$ 3) $X_R(\frac{1}{2})=1$ 4) $X_R(1)=0$

30- **Which of the following statements is true?**

1) Monotone convergence theorem is available in Riemann theory.
2) Dominated convergence theorem is NOT available in Riemann theory.
3) Proving classical theorems in Riemann theory is easier than Lebesgue theory.
4) Every measurable function f is monotone.

موسسه تحقیقاتی آرمان

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

ریاضیات عمومی:

۳۱- مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}+\ldots+\frac{۱}{\sqrt[۳]{n}}}{۲\sqrt[۳]{n^۲}}$ ، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۴}$
۳) $\frac{۱}{۲}$
۴) $\frac{۱}{۳}$

۳۲- اگر $A=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\ldots+\frac{۱}{۲^n}}$ و $B=\sum_{n=۱}^{\infty}\left(\frac{۱.۲.۳....n}{۳.۵.۷....(۲n+۱)}\right)^{\frac{۱}{۲}}$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) سری A همگرا و سری B واگراست.
۲) سری A واگرا و سری B همگراست.
۳) هر دو سری همگرا هستند.
۴) هر دو سری واگرا هستند.

www.isijournal.net

۳۳- مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-e^{-\frac{a^2x^2}{2}}}{x^4}$، که در آن a عدد ثابت است، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{12}a^4$

۲) $-\frac{a^4}{8}$

۳) $\frac{a^4}{8}$

۴) $\frac{1}{12}a^4$

۳۴- فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر $[1,\infty)$ باشد، که $f(1)=1$ و $f'(x)=\frac{1}{x^2+f(x)^2}$. کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f کران‌دار است و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود نیست.

۲) تابع f بی‌کران است و $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود نیست.

۳) $\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

۴) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود و متناهی است.

۳۵- طول منحنی $r=\sin^3\frac{\theta}{3}$ در دستگاه مختصات قطبی، کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{3}$

۲) $\frac{2\pi}{3}$

۳) $\frac{3\pi}{4}$

۴) $\frac{3\pi}{2}$

۳۶- تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

مقدار $D_{\vec{u}}f(0,0)$ به ازای $\vec{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}j$، کدام است؟

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲) $-\sqrt{2}$

۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۴) $\sqrt{2}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۳۷- مقدار انتگرال $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}} dy\,dx$، کدام است؟

۱) $e-1$

۲) $e+1$

۳) $\frac{e-1}{2}$

۴) $\frac{e+1}{2}$

۳۸- اگر D ناحیهٔ محصور بین استوانه‌های $x^2+y^2=1$، $x^2+y^2=4$، مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحهٔ $z=1$ باشد، مقدار انتگرال $\iiint_{D} \frac{dv}{\sqrt{x^2+y^2}}$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$

۲) 2π

۳) $\frac{3\pi}{2}$

۴) π

۳۹- فرض کنید $\vec{F}=\left[x^2y^3+y-\cos(x^3)\right]\vec{i}+\left[x^3y^2+\sin(y^3)+x\right]\vec{j}+z\vec{k}$ و C دایرهٔ $x^2+y^2=1$ در جهت راست‌گرد در صفحهٔ $z=0$ باشد، مقدار $\int_{C}\vec{F}.d\vec{r}$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

مبانی علوم ریاضی:

۴۰- نقیض گزاره مقابل کدام است؟ «اگر حاصل‌ضرب دو عدد صفر باشد حداقل یکی از آن دو عدد صفر است»

۱) $\exists a\ \exists b \quad a\neq 0 \text{ و } b\neq 0 \text{ و } ab=0$

۲) $\exists a\ \exists b \quad a\neq 0 \text{ و } b\neq 0 \text{ و } ab\neq 0$

۳) $\exists a\ \exists b \quad a=0 \text{ یا } b=0 \text{ یا } ab=0$

۴) $\exists a\ \exists b \quad a\neq 0 \text{ یا } b\neq 0 \text{ یا } ab\neq 0$

۴۱- کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $A\notin P(B)$ و $B\in P(C)$ آنگاه $A\notin P(C)$

۲) اگر $A\subseteq B$ و $B\in C$ آنگاه $A\in C$

۳) $P(A-B)-\{\varnothing\}\subseteq P(A)-P(B)$

۴) اگر $x\in A$ و $A\not\subseteq B$ آنگاه $x\notin B$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۴۲- فرض کنید $A \subseteq X$. تابع $\chi_A : X \to \{0,1\}$ با ضابطهٔ تعریف $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$، تابع مشخصهٔ A نامیده می‌شود، اگر تحدید تابع χ_A به زیر مجموعه‌ای از X مانند B تابعی ثابت باشد، آن‌گاه:

۱) $B = A$

۲) $B \cap A' = \varnothing$

۳) $B \cap A = \varnothing$

۴) $B \subseteq A$ یا $B \subseteq A'$ (A' متمم A است)

۴۳- تابع $f : X \to Y$ مفروض است. افراز $P = \left\{ f^{-1}(\{y\}) \mid f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing, y \in Y \right\}$ از مجموعه X را در نظر بگیرید. اگر رابطهٔ هم ارزی ناشی از P را با X/P نمایش دهیم، در این صورت X/P کدام است؟

۱) $\{(a,b) \in X \times X \mid a = b\}$

۲) $\{(a,b) \in X \times X \mid f(a) = f(b)\}$

۳) $\left\{(a,b) \in X \times X \mid f^{-1}(\{f(a)\}) = b\right\}$

۴) $\left\{(a,b) \in X \times X \mid a = f^{-1}(\{f(b)\})\right\}$

۴۴- اگر $f : X \to Y$ یک تابع باشد و $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، آنگاه کدام گزینه ممکن است، برقرار نباشد؟

۱) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

۲) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

۳) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$

۴) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

۴۵- فرض کنید A بازهٔ $(0,1)$ است. عدد اصلی A^A با عدد اصلی کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر نیست؟

۱) $(0,1)^{\mathbb{R}}$

۲) $P(\mathbb{R})$

۳) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

۴) $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۴۶- کدام‌یک از ماتریس‌های زیر را می‌توان به حاصل‌ضربی از ماتریس‌های مقدماتی تجزیه کرد؟

۱) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

۴۷- معادلهٔ $2XY^2 - YXY - Y^2X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$، چند جواب (X, Y) در ماتریس‌های حقیقی 2×2 دارد؟

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) نامتناهی

۴۸- اگر $T : M_4(\mathbb{R}) \to M_4(\mathbb{R})$ با ضابطه $T(A) = A^t + A$ باشد، آنگاه رتبه T چند است؟

۱) ۴

۲) ۶

۳) ۸

۴) ۱۰

۴۹- فرض کنید A یک ماتریس 10×10 حقیقی است، که دارای یک زیرماتریس تماماً صفر $r \times s$ است، و سایر درایه‌های A همگی ناصفرند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $r + s = 9$ آنگاه $\det A \neq 0$

۲) اگر $r + s = 10$ آنگاه $\det A = 0$

۳) اگر $r + s = 11$ آنگاه $\det A = 0$

۴) اگر $r + s = 10$ آنگاه $\det A \neq 0$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۵۰- فرض کنید $A\in M_{۴}(\mathbb{C})$ به‌طوری‌که $\det(A)=۱$ و $\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(A^{-۱})=۰$. کدام گزاره صحیح است؟

۱) $A^{۲}=I$

۲) $A^{۲}+A+I$ معکوس‌پذیر نیست.

۳) $A^{۳}=A+I$

۴) $A=\begin{bmatrix}۰ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۰\end{bmatrix}$

۵۱- فرض کنید A ماتریسی ۲۰×۲۰ با درایه‌های حقیقی بوده که عناصر روی قطر آن همگی صفر هستند، و سایر درایه‌ها $+۱$ یا -۱ هستند، و در ضمن تعداد ۱ها و -۱ها برابرند. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\operatorname{rank}(A)\le ۹$

۲) $\operatorname{rank}(A)=۱۰$

۳) $\operatorname{rank}(A)=۱۹$

۴) $\operatorname{rank}(A)=۲۰$

مبانی آنالیز ریاضی:

۵۲- فرض کنید S و T دو زیر مجموعه $\mathbb{R}$ باشند، و ∂S مرز مجموعه S باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\partial(S\cup T)\subseteq \partial S\cup \partial T$

۲) $\partial(S\cup T)=\partial S\cup \partial T$

۳) $\partial(S\times T)=\partial S\times \partial T$

۴) $\partial S\cup \partial T\subseteq \partial(S\cup T)$

۵۳- کدام گزینه درست است؟

۱) اشتراک دنباله نزولی از مجموعه‌های بسته ناتهی است.

۲) اگر $A\subseteq \mathbb{R}$ فشرده باشد آنگاه $\overline{A^{\circ}}$ نیز فشرده است.

۳) هر مجموعه بسته از اعداد حقیقی شامل ماکزیمم و می‌نیمم خود هست.

۴) هر زیر مجموعهٔ شمارای نامتناهی و کراندار از اعداد حقیقی فشرده است.

۵۴- فرض کنید $(x_n)_n$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد، که در $\mathbb{R}$ چگال است. کدام گزینه درست است؟

۱) دنبالهٔ $(x_n)_n$ می‌تواند همگرا باشد.

۲) مجموعهٔ حدهای زیر دنباله‌ای $(x_n)_n$ حداکثر شمارا است.

۳) دنباله $(x_n)_n$ دارای هیچ زیر دنباله همگرا به اعداد اصم نیست.

۴) $\liminf_n x_n=-\infty$ و $\limsup_n x_n=+\infty$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۵۵- مقدار $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{e}$

۲) ۱

۳) $e-1$

۴) e

۵۶- کدام‌یک از توابع زیر روی $[0,\infty)$، پیوستهٔ یکنواخت است؟

۱) $f(x)=x^3$

۲) $f(x)=x^2\cos x$

۳) $f(x)=\frac{\cos x}{5+x^4}$

۴) $f(x)=(\sin x)\sqrt{x}$

۵۷- فرض کنید $M=\{x\in\mathbb{R}:x^2\le 2\}\cap\mathbb{Q}$، که $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا است. کدام گزینه در مورد M درست است؟

۱) در $\mathbb{R}$ بسته است.

۲) در $\mathbb{R}$ باز است.

۳) در $\mathbb{Q}$ هم باز و هم بسته است.

۴) در $\mathbb{Q}$ نه باز است و نه بسته

۵۸- فرض کنید $f:I\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته است. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر I یک زیر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ در $\mathbb{R}$ کراندار است.

۲) اگر I یک بازه باز در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ یک بازه در $\mathbb{R}$ است.

۳) اگر I یک بازه کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ نیز یک بازه کراندار است.

۴) اگر I یک زیر مجموعه بسته و کراندار در $\mathbb{R}$ باشد، آنگاه $f(I)$ در $\mathbb{R}$ بسته است.

۵۹- تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر به ازای هر مجموعه $A\subseteq\mathbb{R}$ رابطه $f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}$ برقرار باشد آنگاه f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۲) اگر $A\subseteq\mathbb{R}$ و به ازای هر زیر مجموعه فشرده C از A تابع f روی C پیوسته باشد آنگاه f روی A پیوسته است.

۳) اگر $G_i\subseteq\mathbb{R}$ها باز باشند و تابع روی هر G_i پیوسته باشد آنگاه f روی $\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$ نیز پیوسته است.

۴) اگر $F_i\subseteq\mathbb{R}$ها بسته باشند و تابع f روی هر F_i پیوسته باشد آنگاه f روی $\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$ نیز پوسته است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۶۰- فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، کدام گزینه پیوستگی f را نتیجه می‌دهد؟

۱) یکنوا با برد همبند باشد.

۲) یک به یک با برد همبند باشد.

۳) یک به یک و پوشا باشد.

۴) با برد همبند و خاصیت مقدار میانی باشد.

۶۱- فرض کنید تابع $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ پیوسته باشد، و برای هر $t,s\in[0,1]$، $tf(s)+sf(t)\le 2$.

اگر $A=\int_0^1 f(x)dx$، کدام گزینه درست است؟

۱) $A\ge\frac{\pi}{4}$

۲) $A\le\frac{\pi}{2}$

۳) $-\frac{\pi}{4}\le A\le\frac{\pi}{4}$

۴) هیچ کران بالا یا پایینی برای A وجود ندارد.

۶۲- هرگاه تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه:

۱) مشتق f حداکثر در دو نقطه صفر است و f یکنواست.

۲) مشتق f هیچ‌گاه صفر نمی‌شود و f اکیداً یکنواست.

۳) $f'(x)>0$ برای هر x و f اکیداً صعودی است.

۴) مشتق f همواره صفر است.

۶۳- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات مثبت باشد و $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ همگرا باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$ همگرا است.

۲) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ همگرا است.

۳) $\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ همگرا است.

۴) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ واگرا است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

مبانی آنالیز عددی:

۶۴- فرض کنید هر عدد حقیقی x دارای نمایش به صورت $\pm(0/a_1a_2a_3)_2\times 2^e$ در مبنای ۲ است، که $a_1\neq 0$ و $-1\le e\le 2$. M بزرگترین عدد قابل نمایش، و T بزرگترین عدد منفی قابل نمایش، کدام هستند؟

۱) $M=7\ ,\ T=-\frac{1}{4}$

۲) $M=\frac{7}{2}\ ,\ T=-\frac{1}{4}$

۳) $M=\frac{7}{2}\ ,\ T=-\frac{7}{2}$

۴) $M=7\ ,\ T=-\frac{1}{8}$

۶۵- فرض کنید f مشتقات پیوسته مرتبه دوم دارد، و $|f''(x)|<1\ ,\ \forall x\in(0,1]$. اگر تابع f به صورت خطی در $x_0=0$ و $x_1=1$ تقریب زده شود، آنگاه کران بالا برای خطای این تقریب در بازه $[0,1]$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{8}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) ۱

۶۶- فرض کنید به ازای یک مقدار ثابت c، $f(x)=\frac{1}{x+c}$. در این صورت $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$، برابر است با ....

۱) ۰

۲) $\frac{(n+1)!(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\dots(x_n+c)}$

۳) $\frac{n!(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\dots(x_n+c)}$

۴) $\frac{(-1)^n}{(x_0+c)(x_1+c)\dots(x_n+c)}$

۶۷- رابطه تکراری $x_{k+1}=\sqrt{x_k+2}+(x_k-2)\ ,\ k=0,1$، به ازای .... است.

۱) $x_0\neq 2$ واگرا

۲) $x_0\neq 2$ همگرای مرتبه دوم

۳) $x_0<2$ همگرای خطی

۴) $x_0>2$ همگرای خطی

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۶۸- روش زیر را در نظر بگیرید:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \approx w_1 f(\frac{\pi}{2}) + w_2 f(-\frac{\pi}{2})$$

مقادیر w_1 و w_2 چقدر باشند تا فرمول بالا برای توابع $\sin x$ و $\cos x$، مقدار دقیق انتگرال را به دست ندهد؟

۱) $w_1 = w_2 = 1$

۲) $w_1 = w_2 = 2$

۳) $w_2 = 0 , w_1 = -2$

۴) $w_1 = w_2 = \frac{\pi}{2}$

۶۹- کدام گزینه نادرست است؟

۱) اگر A ماتریس متقارن باشد، آنگاه A^2 تجزیه چولسکی یگانه دارد.

۲) اگر A ماتریس معین مثبت متقارن باشد، آنگاه تجزیه چولسکی A وجود دارد.

۳) اگر A در دستگاه $Ax = b$ معین مثبت باشد، آنگاه دستگاه مزبور جواب یگانه دارد.

۴) ماتریس همانی I_n به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، معین مثبت است.

مبانی احتمال:

۷۰- عدد ۲۴ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع ۴ عدد بیان کرد که همگی مضرب ۳ باشند؟

۱) $\binom{7}{4}$

۲) $\binom{8}{3}$

۳) $\binom{11}{3}$

۴) $\binom{11}{4}$

۷۱- سه نامه به صورت تصادفی به سه آدرس مجزا ارسال می‌شوند. احتمال این که هیچ کدام از نامه‌ها به آدرس صحیح نرسد، برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$

۲) $\frac{1}{27}$

۳) $\frac{1}{9}$

۴) $\frac{1}{3}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۷۲- احتمال مرگ غیرطبیعی برای مردان مسن سیگاری، سه برابر احتمال مرگ غیرطبیعی برای مردان مسن غیرسیگاری است. اگر ۱۰ درصد از مردان مسن سیگاری باشند، احتمال اینکه مردانی که مرگ غیرطبیعی دارند، سیگاری باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۳- سیستمی با ۵ جزء را در نظر بگیرید، که مستقل از هم کار می‌کنند. اگر احتمال فعال بودن این اجزا به ترتیب برابر p و $۲p$ و ... و $۵p$ باشد، و سیستم تا زمانی که حداقل ۴ جزء آن فعال است، به فعالیت خود ادامه دهد، احتمال فعال بودن سیستم کدام است؟ $(p < \frac{۱}{۵})$

۱) $۲۷۴p^۴ - ۶۰۰p^۵$

۲) $۱۲۰p^۵ + ۲۷۴p^۴$

۳) $۱۲۰p^۵ + ۲۵۰p^۴$

۴) $۲۷۴p^۴ - ۴۸۰p^۵$

۷۴- معمولاً ۷۵٪ از خبرهای شبکه A صحیح بوده، در حالی‌که این درصد برای شبکه B برابر ۸۰٪ است. در چند درصد از خبرها، این دو شبکه با هم مغایر هستند؟

۱) ٪۵

۲) ٪۲۵

۳) ٪۳۵

۴) ٪۴۵

۷۵- از بین n زوج متأهل دو نفر را به تصادف و پی‌درپی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو نفر انتخاب شده زن و شوهر باشند، چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲(۲n-۱)}$

۲) $۱-\frac{۱}{n}$

۳) $\frac{۱}{۲n-۱}$

۴) $۱-\frac{۱}{۲n}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبانی ترکیبیات، مبانی جبر و بهینه‌سازی خطی):

آنالیز ریاضی:

۷۶- فضای متریک (X,d) و $A \subseteq X$ را در نظر بگیرید. برای $x \in X$ قرار می‌دهیم:

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\{x \in X : d(x,A) \le 1\}$ کراندار است.

۲) $\{x \in X : d(x,A) < 1\}$ باز است.

۳) $\{x \in X : d(x,A) \ge 1\}$ فشرده است.

۴) $\{x \in X : d(x,A) = 0\}$ همبند است.

۷۷- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک است، و E زیر مجموعهٔ همبندی از X باشد، و نیز $E^\circ \subseteq A \subseteq E \subset B \subseteq \bar{E}$ ($\bar{E}$ بستار و E° درون E هستند). در این صورت:

۱) A و B هر دو همبند هستند.

۲) A همبند است ولی B همبند نیست.

۳) A ممکن است همبند نباشد ولی B همواره همبند است.

۴) ممکن است هیچ‌کدام همبند نباشند.

۷۸- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $f : (X,d) \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد:

$$P = \{x \in X : f(x) \ge 0\}$$
$$S = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

کدام گزینه درست است؟ (∂P مرز P است.)

۱) $\partial P = S$

۲) $\partial P \subseteq S$ ولی می‌تواند $S \ne \partial P$

۳) $S \subseteq \partial P$ ولی می‌تواند $S \ne \partial P$

۴) مجموعه‌های S و ∂P لزوماً مقایسه‌پذیر نیستند.

۷۹- فرض کنید d_1 و d_2 دو متر روی مجموعه ناتهی X باشند، به طوری‌که برای عدد مثبت $c > 0$ داریم:

$$d_1(x,y) \le c d_2(x,y) \qquad x,y \in X$$

اگر فضای متریک (X,d_2) همبند و فشرده باشد، کدام گزینه در مورد فضای متریک (X,d_1) درست است؟

۱) همبند و فشرده است.

۲) همبند است ولی لزوماً فشرده نیست.

۳) فشرده است ولی لزوماً همبند نیست.

۴) لزوماً همبند و فشرده نیست.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۸۰- فرض کنیم X و Y فضاهای متریک و $f: X \to Y$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت همه گزینه‌های زیر درست هستند، به غیر از:

۱) برای هر مجموعه بسته C در Y، $f^{-1}(C)$ در X بسته است.

۲) برای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ در X باز است.

۳) $f^{-1}(\text{int } B) \subseteq \text{int}(f^{-1}(B))$ برای هر $B \subseteq Y$.

۴) $\overline{f(A)} \subseteq f(\bar{A})$ برای هر $A \subseteq X$

۸۱- فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $A \subseteq X$ به طوری که تابع $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$ پیوسته است. کدام گزینه درست است؟

۱) A فشرده است.

۲) A همبند است.

۳) A هم باز و هم بسته است.

۴) $A = \emptyset$ یا $A = X$.

۸۲- فرض کنیم X و Y دو فضای متریک و تابع $f: X \to Y$ پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم $E \subseteq X$ و $x \in E'$. (E' مجموعه نقاط حدی E است.) کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر f یک به یک باشد آنگاه $f(x) \in (f(E))'$.

۲) اگر f پوشا باشد آنگاه $f(x) \in (f(E))'$.

۳) اگر $f(E)$ نامتناهی باشد آنگاه $f(x) \in (f(E))'$.

۴) اگر $f(E)$ ناشمارا باشد آنگاه $f(x) \in (f(E))'$.

۸۳- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک فشرده و $f: X \to X$ یک نگاشت طول‌پا باشد، یعنی برای هر $x,y \in X$، $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$. در این صورت:

۱) f پوشا است.

۲) f نقطهٔ ثابت دارد.

۳) برد f همبند است.

۴) f لزوماً تابع همانی است.

۸۴- اگر $\{x_n\}, \{y_n\}$ دو دنباله در فضای متریک X باشند، کدام گزینه درست است؟

۱) اگر $\{x_n\}$ کراندار باشد و $d(x_n,y_n) \to 0$ آنگاه $\{y_n\}$ همگراست.

۲) اگر به ازای هر n، $d(x_{n+2},x_{n+1}) \leq d(x_{n+1},x_n)$ آنگاه $\{x_n\}$ کوشی است.

۳) اگر $\{x_n\}$ کوشی باشد و $d(x_n,y_n) \to 0$ آنگاه $\{y_n\}$ همگراست.

۴) اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ کوشی باشند آنگاه دنباله $a_n = d(x_n,y_n)$ در $\mathbb{R}$ همگراست.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۸۵- فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک است، که هر زیر مجموعه بسته و کراندار در آن فشرده است. کدام گزاره درخصوص X درست است؟

۱) فشرده است.

۲) همبند است.

۳) تام است.

۴) زیر مجموعه سره چگال دارد.

۸۶- برای هر $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x & 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

کدام گزینه در مورد دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ درست است؟

۱) همگرای یکنواخت است.

۲) در هیچ نقطه همگرا نیست.

۳) نقطه به نقطه به یک تابع ناپیوسته همگراست.

۴) نقطه به نقطه همگراست ولی همگرای یکنواخت نیست.

۸۷- فرض کنید $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 + n^4 x}$ برای $x \in (0,+\infty)$. کدام گزینه درست است؟

۱) سری بر بازه $(0,+\infty)$ همگرای یکنواخت است.

۲) سری بر هر زیر مجموعه فشرده از $(0,+\infty)$ همگرای یکنواخت است.

۳) سری بر بازه $(0,c)$ برای $c > 0$ همگرای یکنواخت است.

۴) سری بر بازه $(0,1]$ همگرایی یکنواخت است اما بر بازه $(0,+\infty)$ همگرای یکنواخت نیست.

۸۸- فرض کنیم $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته باشد، در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\{f_n\}$ دارای زیر دنباله همگرای نقطه‌وار است.

۲) $\{f_n\}$ در صورت همگرایی نقطه‌وار، حدش پیوسته است.

۳) عدد حقیقی M چنان وجود دارد که برای هر $x \in [a,b]$ و هر $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq M$

۴) اگر $\{f_n\}$ همگرای نقطه‌وار و دارای زیر دنباله همگرای یکنواخت باشد آنگاه حدش پیوسته است.

موسسه تحقیقات آرمان

www.isijournal.net

۸۹- فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشند، و دنباله توابع $\{f_n\}$ به صورت: $f_n(x)=a_nx+b_n,\quad x\in\mathbb{R}$، تعریف شوند. در چه صورت دنباله $\{f_n\}$ هم‌پیوسته است؟

۱) فقط اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد.

۲) اگر $\{b_n\}$ همگرا باشد.

۳) اگر و فقط اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد.

۴) اگر و فقط اگر $\{b_n\}$ کراندار باشد.

۹۰- فرض کنیم تابع f بر $[۰,۱]$ پیوسته باشد. همه گزینه‌های زیر درست هستند، به‌غیر از:

۱) اگر برای هر $n=۵,۶,۷,\ldots$ ، $\int_۰^۱ f(x)x^n dx=\frac{۱}{n+۵}$ آنگاه $\forall x\in[۰,۱]$ ، $f(x)=x^۵$

۲) اگر برای هر $n=۰,۱,۲,\ldots$ ، $\int_۰^۱ f(x)x^{۲n} dx=۰$ آنگاه $\forall x\in[۰,۱]$ ، $f(x)=۰$

۳) اگر برای هر $n=۰,۱,۲,\ldots$ ، $\int_۰^۱ f(x)x^n dx=\frac{۱}{n+۱}$ آنگاه $\forall x\in[۰,۱]$ ، $f(x)=۱$

۴) اگر برای هر $n=۵,۶,۷,\ldots$ ، $\int_۰^۱ f(x)x^n dx=۰$ آنگاه $\forall x\in[۰,۱]$ ، $f(x)=۰$

موسسه تحقیقاتی آرمان

مبانی ترکیبیات:

۹۱- ضریب جمله $x^۲y^۳z^۵$ در بسط $(x+۲y+z+۲)^{۱۱}$، کدام است؟

۱) $۸\times۲۸\times۹۹۰$

۲) $۱۶\times۲۸\times۹۹۰$

۳) $۴\times۲۸\times۹۹۰$

۴) $۲\times۲۸\times۹۹۰$

۹۲- اگر T یک درخت ۱۰۰ رأسی فقط با رأس‌های درجه ۳ و درجه ۱ باشد، آنگاه T چند رأس درجه ۱ دارد؟

۱) ۴۹

۲) ۵۰

۳) ۵۱

۴) ۵۲

۹۳- فرض کنید G گرافی است که با مکمل خود، یکریخت است. اگر G دارای ۳۳ یال باشد، تعداد رئوس G کدام است؟

۱) ۱۰

۲) ۱۱

۳) ۱۲

۴) ۱۳

www.isijournal.net

۹۴- حداقل تعداد رنگ لازم برای رنگ کردن دیوارها و سقف یک اتاق پنج ضلعی به طوری که دیوارهای مجاور رنگ متفاوت داشته باشند، و رنگ سقف با دیوارها متفاوت باشد، کدام است؟

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۹۵- تعداد دنباله‌های به طول چهار با اعداد ۰، ۱، ۲ که شامل حداقل یک ۰، حداقل یک ۱ و حداقل یک ۲ هستند، کدام است؟

۱) ۳۰

۲) ۳۳

۳) ۳۶

۴) ۳۹

۹۶- کوچک‌ترین عدد k که مجموعه رأس‌های یک دور ۲۱ رأسی را بتوان به k مجموعه مستقل افراز کرد، چند است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۹۷- احتمال این که تعداد روزهای تولد یک خانواده ۱۰ نفری تمام روزهای هفته را شامل شود، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{7^{10}}\sum_{k=0}^{7}(-1)^k\binom{7}{7-k}(7-k)^{10}$

۲) $\frac{1}{7^{10}}\sum_{k=0}^{10}(-1)^k\binom{10}{10-k}(10-k)^{7}$

۳) $\frac{1}{7^{10}}\binom{10}{7}7!3^7$

۴) $\frac{1}{7^{10}}\binom{10}{3}3!7^3$

۹۸- به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۹ را در یک ردیف مرتب کرد به طوری که هیچکدام از قطعه‌های ۲۵۳ و ۳۵۷ و ۲۹۷ ظاهر نشده باشد؟

۱) ۶۸۴

۲) ۶۴۲

۳) ۶۲۴

۴) ۶۴۸

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۹۹- مجموع اندازه‌های زیرمجموعه‌های $\{1,2,...,100\}$ کدام است؟

۱) $(99)2^{100}$

۲) $(100)2^{100}$

۳) $(99)2^{99}$

۴) $(100)2^{99}$

۱۰۰- به چند طریق می‌توان ۶ عدد متمایز از بین اعداد ۱ تا ۲۰ انتخاب کرد، به طوری که هیچ دو عددی، متوالی نباشند؟

۱) $\binom{15}{9}$

۲) $\binom{25}{5}$

۳) $\binom{10}{6}$

۴) $\binom{14}{9}$

۱۰۱- تعداد تطابق‌های کامل گراف K_{10} (گراف کامل ۱۰ رأسی)، کدام است؟

۱) ۹۴۷

۲) ۹۴۰

۳) ۹۴۴

۴) ۹۴۵

۱۰۲- فرض کنید G گرافی ساده ۱۰ رأسی با دقیقاً ۴ زیردرخت فراگیر است، در این صورت همه موارد زیر در مورد G صحیح هستند، به‌غیر از:

۱) G بیش از ۱۰ یال دارد.

۲) G دو بخشی است.

۳) G برگ دارد.

۴) G رأس درجه ۹ ندارد.

۱۰۳- تعداد جواب‌های معادلهٔ $2x+2y+z=41$ در مجموعه اعداد صحیح مثبت، برابر است با:

۱) $\binom{20}{2}$

۲) $\binom{37}{2}$

۳) $\binom{40}{2}$

۴) $\binom{41}{2}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۰۴- گراف کامل K_{10} را در نظر گرفته و فرض کنید w رأسی از آن باشد. در این صورت تعداد گشت‌های بسته به طول ۴ از w به w با کدام یک برابر است؟

۱) ۶۵۶

۲) ۶۵۷

۳) ۶۵۸

۴) ۶۵۹

۱۰۵- تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $|x|+|y| \le 1000$ برابر است با:

۱) ۱۰۰۲۰۰۱

۲) ۲۰۰۱۰۰۲

۳) ۱۰۰۱۰۰۲

۴) ۲۰۰۲۰۰۱

مبانی جبر:

۱۰۶- اگر $\mathbb{R}^*$ مجموعه اعداد حقیقی ناصفر و $\mathbb{R}^+$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت باشد، کدام یک از زوج گروه‌های داده شده با یکدیگر، یکریختند؟

۱) $(\mathbb{R}^+, .),(\mathbb{R},+)$

۲) $(\mathbb{R}^*, .),(\mathbb{R},+)$

۳) $(\mathbb{Q},+),(\mathbb{Z},+)$

۴) $(\mathbb{R},+),(\mathbb{Q},+)$

۱۰۷- فرض کنید G یک گروه و $n \ge 1$ یک عدد طبیعی باشد، به طوری که به ازای هر $a,b \in G$، داریم $(ab)^n = a^n b^n$. در این صورت اگر $G_n = \{a \in G \mid a^n = e\}$ و $G^n = \{a^n \mid a \in G\}$، آنگاه کدام یک از احکام زیر صحیح است؟

۱) G^n و G_n زیرگروه‌های نرمال G نیستند، ولی $|G:G_n| = |G^n|$.

۲) G_n در G نرمال ولی G^n در G لزوماً نرمال نیست، و $|G:G_n| = |G^n|$.

۳) G^n و G_n زیرگروه‌های نرمال G هستند، و $\frac{G}{G_n} \cong G^n$.

۴) G^n و G_n زیرگروه‌های نرمال G هستند، و $|G_n| = |G^n|$.

۱۰۸- کدام یک از گروه‌های زیر دارای عضو از مرتبه ۴ نیست؟

۱) A_4

۲) $S_5 \times \mathbb{Z}_2$

۳) گروه تقارن‌های مربع

۴) گروه ضربی ماتریس‌های وارون‌پذیر ۲×۲ با درایه‌های $\mathbb{Z}_4$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۰۹- در گروه S_5، اگر $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$، آنگاه تعداد عناصری مانند $\psi \in S_5$ که در شرط $\psi\sigma\psi^{-1} = \sigma^2$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

۱۱۰- تعداد مقسوم علیه‌های صفر در حلقهٔ $\mathbb{Z}_{100}$، برابر است با:

۱) ۴۰

۲) ۵۰

۳) ۶۰

۴) ۷۰

۱۱۱- فرض کنید G یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ ۲۸ باشد، به طوری که G زیرگروهی نرمال از مرتبهٔ ۷ دارد. در این صورت، $|G'|$ برابر است با:

۱) ۲۸

۲) ۷

۳) ۴

۴) ۲

۱۱۲- کدام یک از مجموعه‌های زیر با جمع و ضرب ماتریس‌ها تشکیل حلقه می‌دهند؟

۱) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}_2\right\}$

۲) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{Z}_2\right\}$

۳) $\left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{Z}_2\right\}$

۴) $\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & d & a \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}_2\right\}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۱۳- فرض کنید G یک گروه بوده و H و K زیرگروه‌هایی از G باشند، و $x,y\in G$. اگر $Hx=Ky$، آنگاه داریم:

۱) $x=y$

۲) $H=K$

۳) $G=HK$

۴) $H\cap K=\{e\}$

۱۱۴- کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

۱) هر زیرگروه با تولید متناهی از گروه $(\mathbb{Q},+)$ یک زیرگروه دوری است.

۲) گروه $(\mathbb{Q},+)$ اجتماع یک زنجیر صعودی از زیرگروه‌های دوری خودش است.

۳) یک گروه با تولید متناهی نمی‌تواند اجتماع یک زنجیر صعودی از زیرگروه‌های واقعی خودش باشد.

۴) گروه $(\mathbb{Q},+)$ دارای زیرگروه ماکسیمال است.

۱۱۵- دو حلقهٔ $\mathbb{Z}_4$ و $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ را که در آن $\langle x^2\rangle$ ایده‌آل تولید شده توسط x^2 می‌باشد، درنظر بگیرید، آنگاه همهٔ موارد زیر صحیح‌اند، به غیر از:

۱) دو حلقهٔ $\mathbb{Z}_4$ و $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ چهار عضوی هستند.

۲) دو حلقهٔ $\mathbb{Z}_4$ و $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ با هم یکریخت هستند.

۳) دو حلقهٔ $\mathbb{Z}_4$ و $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ حوزه صحیح نیستند.

۴) دو حلقهٔ $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ و $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{\langle x^2\rangle}$ با هم یکریخت هستند.

۱۱۶- فرض کنید R حلقه‌ای یکدار بوده و برای هر $x\in R$، $x^3+2x^2+x=0$. در این صورت مشخصهٔ R برابر است با:

۱) ۲

۲) ۳

۳) ۴

۴) ۸

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۱۷- فرض کنید G گروهی متناهی است که $|G| > 1$. در این صورت کدام گزینه در مورد $Aut(G \times G)$، صحیح است؟

۱) عنصری از مرتبهٔ ۲ دارد.

۲) اگر $G = \mathbb{Z}_2$، آنگاه $Aut(G \times G)$ دوری است.

۳) اگر G دوری باشد، آنگاه $Aut(G \times G)$ آبلی است.

۴) اگر G از مرتبهٔ فرد باشد، $Aut(G \times G)$ از مرتبهٔ فرد است.

۱۱۸- اگر $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، آنگاه کدام گزینه در مورد $Aut(G)$ صحیح است؟

۱) $Aut(G)$ متناهی است.

۲) $Aut(G) \simeq \mathbb{Z}$.

۳) $Aut(G)$ ناآبلی است.

۴) $Aut(G) \simeq Aut(\mathbb{Z}) \times Aut(\mathbb{Z})$

۱۱۹- گروه $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (2,2) \rangle}$ با کدام یک از گروه‌های زیر یکریخت است؟

۱) $\mathbb{Z}$

۲) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

۳) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

۴) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$

۱۲۰- فرض کنید R حلقه‌ای جابجایی، یکدار و نامتناهی باشد. در این صورت همهٔ موارد زیر صحیح‌اند، به غیر از:

۱) مرکز $M_2(R \times R)$ نابدیهی است.

۲) $M_2(R \times R) \simeq M_2(R) \times M_2(R)$

۳) تعداد یکال‌های $M_2(R \times R)$ نامتناهی است.

۴) تعداد ایده‌آل‌های دوطرفه $M_2(R \times R)$ ممکن است متناهی باشد.

بهینه‌سازی خطی:

۱۲۱- فرض کنید مساله (P) به صورت زیر، جواب بهینه دارد. اگر یکی از قیدهای این مسأله در اسکالر ناصفر λ ضرب شود، آنگاه گزینه صحیح در مورد مقدار بهینه مربوط به متغیر دوگان متناظر با قید جدید کدام است؟

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \quad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

۱) $\frac{1}{\lambda}$ برابر می‌شود.

۲) λ برابر می‌شود.

۳) λ^2 برابر می‌شود.

۴) تغییر نمی‌کند.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۲۲- فرض کنید جواب بهینه برای مسأله

$$\min Z = 2x_1 + 3x_2 + c_3x_3$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

به ازای $x_1 = x_2 = 1$ بدست آید. در این صورت، v_1 و v_2، متغیرهای دوگان متناظر با قیدهای مساله در جواب بهینه برابرند با .....

۱) $v_1 = v_2 = 1$

۲) $v_1 = 2$ ، $v_2 = 3$

۳) $v_1 = -\frac{5}{2}$ ، $v_2 = \frac{1}{2}$

۴) $v_1 = \frac{5}{2}$ ، $v_2 = \frac{1}{2}$

۱۲۳- مساله (P) به صورت

$$\min Z = c^T x$$
$$\text{s.t.} \quad \text{(P)}$$
$$Ax = 0$$
$$0 \leq x \leq u$$

را در نظر بگیرید، که در آن u برداری معلوم است. دوگان این مساله را (D) بنامید. کدام گزینه صحیح است؟

۱) (D) یا جواب بهینه دارد، یا بی‌کران است.

۲) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

۳) اگر (D) شدنی باشد، آن‌گاه جواب بهینه دارد.

۴) (D) می‌تواند ناشدنی باشد.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۲۴- مساله برنامه‌ریزی خطی (P) را به صورت

$$\min Z = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)$$
$$\text{s.t.} \quad x - y = b \qquad (P)$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

در نظر بگیرید، و دوگان آن را (D) بنامید. کدام گزینه صحیح است؟

۱) (P) و (D) هر دو جواب بهینه یکتا دارند.

۲) مساله (P) بی‌نهایت جواب بهینه و (D) جواب بهینه یکتا دارد.

۳) (P) بی‌کران است و (D) ناشدنی است.

۴) (P) و (D) هر دو بی‌نهایت جواب بهینه دارند.

۱۲۵- فرض کنید بردار v وجود دارد، که در دستگاه $A^T v = c$ و $v \geq 0$ صدق می‌کند. اگر $Ax \geq 0$، آنگاه ..... .

۱) $c^T x = 0$

۲) $c^T x > 0$

۳) $c^T x \leq 0$

۴) $c^T x \geq 0$

۱۲۶- مساله برنامه‌ریزی خطی (P) را به صورت

$$\min Z = 0$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \geq b \qquad (P)$$
$$x \leq 0$$

در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. اگر (P) ناشدنی باشد، آنگاه (D) ..... .

۱) یا ناشدنی است یا بی‌کران است.

۲) بی‌کران است.

۳) ناشدنی است.

۴) جواب بهینه دارد.

۱۲۷- اگر در روش سیمپلکس روی یک مساله با تابع هدف مینیمم‌سازی، یک متغیر از پایه خارج شود و مقدار تابع هدف در جدول جدید کاهش یابد، آن متغیر در جدول جدید ..... .

۱) اگر وارد پایه شود، جدول بعدی تباهیده خواهد بود.

۲) می‌تواند وارد پایه شود ولی مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند.

۳) نمی‌تواند نامزد ورود به پایه باشد.

۴) ممکن است وارد پایه بشود یا نشود.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۲۸- مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\min Z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$
$$\text{s.t.} \quad Bx_B + Nx_N = b \quad (P)$$
$$x_B \geq 0$$
$$x_N \geq 0$$

که در آن، ستون‌های B مستقل خطی‌اند. اگر داشته باشیم $N^T(B^{-1})^T c_B - c_N \leq 0$، آنگاه ..... .

۱) (P) جواب بهینه دارد

۲) دوگان (P) شدنی است

۳) (P) همواره شدنی است

۴) (P) یا جواب بهینه دارد یا بی‌کران است

۱۲۹- فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب پایه‌ای شدنی برای دستگاه زیر است:

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $\bar{x}$ تباهیده باشد، آنگاه بیش از یک پایه متناظر با $\bar{x}$ وجود دارد.

۲) اگر بیش از یک پایه متناظر با $\bar{x}$ باشند، آنگاه $\bar{x}$ دست کم یک درایه پایه‌ای برابر با صفر دارد.

۳) اگر $\bar{x}$ تباهیده باشد، آنگاه مساله قید زائد دارد.

۴) اگر $\bar{x}$ تباهیده باشد، آنگاه دست کم یکی از درایه‌های b صفر است.

۱۳۰- برای مساله برنامه‌ریزی خطی به صورت

$$\min \ Z = x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 0$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$x_2 = 5$$

کدام گزینه صحیح است؟

۱) جواب بهینه یکتا دارد.

۲) جواب بهینه چندگانه دارد.

۳) بی‌کران است.

۴) ناشدنی است.

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۳۱- فرض کنید جدول زیر، جدول نهایی فاز اولِ روش دوفازی برای حل مسأله زیر است؛

$\min c^T x$

s.t.

$Ax = b$

$x \geq 0$

	Z	x_1 x_2 ... x_n	R_1 R_2 ... R_m	RHS
Z	۱	α		
x	۰			

R_i متغیر مصنوعی متناظر با قید $i-$ ام است. مقدار پارامتر α در این جدول برابر است با ..... .

۱) ۰

۲) ۱

۳) -1

۴) $-m$

۱۳۲- چند وجهی ناتهی $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ را در نظر بگیرید، فرض کنید $n > \text{رتبه}(A)$. آنگاه S نقطه راسی..... .

۱) دارد و بی‌کران است.

۲) ندارد و بی‌کران نیست.

۳) دارد و بی‌کران نیست.

۴) ندارد و بی‌کران است.

۱۳۳- فرض کنید در یک تکرار الگوریتم سیمپلکس اولیه، ستون زیر متغیر وارد شونده به پایه برابر با $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است. به علاوه فرض کنید ماتریس‌های پایه قبل و بعد از محورگیری به ترتیب B و $\bar{B}$ هستند و $\bar{B} = BE$. ماتریس E کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & -۴ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} -۴ & ۰ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

۱۳۴- جدول حمل و نقل مینیمم‌سازی زیر را در نظر بگیرید. اعداد داده شده در جدول ضرایب هزینه را نشان می‌دهند. فرض کنید $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$. برای یافتن یک جواب پایه‌ای شدنی آغازین با استفاده از روش تقریب ووگل (VAM)، اولین اختصاص به کدام متغیر صورت می‌گیرد؟

	۱	۲	۳
۱	$-\alpha_1$	$-\alpha_1$	۰
۲	$-\alpha_2$	$-\alpha_2$	۰
۳	$-\alpha_3$	$-\alpha_3$	۰

۱) x_{13}

۲) x_{33}

۳) x_{11} یا x_{12}

۴) x_{31} یا x_{32}

۱۳۵- جدول زیر متناظر است با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله مینیمم‌سازی (P). s_iها متغیرهای کمکی هستند. فرض کنید در یکی از جواب‌های شدنی برای مسألهٔ (P) داریم $s_1 = 1$ و $s_3 = 4$. مقدار x_1 در این جواب شدنی برابر است با .....

	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
Z	۱	۰	۰	−۱	۰	۰	α
x_2	۰	۰	۱	۰	۰	۱	۸
x_1	۰	۱	۰	۱	۰	−۱	۴
s_2	۰	۰	۰	−۱	۱	۱	۶

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

موسسه تحقیقاتی آرمان

www.isijournal.net

موسسه تحقیقاتی آرمان