



F

نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دورهای دکتری (نیمه متاخر) داخل
سال ۱۳۹۲

علوم کامپیوتر (۲۲۴۷)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (ساختمان گستاخ، منطق - نظریه علوم کامپیوتر)	۴۵	۱	۴۵

اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

-1

در دنباله $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ، رابطه بازگشتی $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ برقرار است. می دانیم $a_1 + a_2 + a_3 = 120^\circ$ و $a_1 + a_2 + a_4 = 186^\circ$ است. در این صورت $a_{100} + a_{101}$ برابر است با:

$$8 \times 2^{100} + 9 \times 3^{100} \quad (2) \quad 9 \times 2^{100} + 8 \times 3^{100} \quad (1)$$

$$2^{104} + 3^{103} \quad (4) \quad 9 \times 2^{101} + 8 \times 3^{101} \quad (3)$$

-2

چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{1, 2, \dots, 3000\}$ دقیقاً بر یکی از اعداد ۲، ۳ یا ۵ بخش‌پذیر هستند؟

$$1200 \quad (2) \quad 800 \quad (1)$$

$$2200 \quad (4) \quad 1400 \quad (3)$$

-3

بزرگترین ضریب در بسط عبارت $(x+y+z)^k$ کدام است؟

$$1260 \quad (2) \quad 126 \quad (1)$$

$$7280 \quad (4) \quad 1680 \quad (3)$$

-4

یک شش ضلعی منتظم با راس‌های a, b, c, d, e, f را در نظر بگیرید. به چند راه می‌توان با اضافه کردن قطرهای غیر متقاطع آن را به مثلث‌ها افراز کرد؟

$$14 \quad (2) \quad 10 \quad (1)$$

$$42 \quad (4) \quad 15 \quad (3)$$

-5

می‌خواهیم ۳ کمیته علمی متمایز به کمک ۵ دانشجو تشکیل دهیم به‌طوری که هر دانشجو عضو حداقل یک کمیته باشد و هر دو کمیته دقیقاً ۲ عضو مشترک داشته باشند. به چند راه می‌توان کمیته‌ها را تشکیل داد؟

$$260 \quad (2) \quad 60 \quad (1)$$

$$630 \quad (4) \quad 420 \quad (3)$$

-6

در یک شهر فرضی تنها سکه‌های رایج، سکه‌های ۱ تومانی، ۲ تومانی و ۳ تومانی است. پرداخت هزینه یک جنس 20° تومانی به چند راه ممکن است؟ مشروط بر آنکه فروشنده هیچ پولی نداشته باشد و تعداد سکه‌های ۱ تومانی از سکه‌های ۲ تومانی مورد استفاده بیشتر باشد.

$$21 \quad (2) \quad 20 \quad (1)$$

$$40 \quad (4) \quad 38 \quad (3)$$

-7

در گراف همبند G با 10° رأس، تعداد زوج مرتبهای (x, y) از رأس‌ها به طوری که $d(x, y) \geq 2$ ، برابر است با ۷۲. تعداد یالهای G کدام است؟

$$18 \quad (2) \quad 9 \quad (1)$$

$$36 \quad (4) \quad 28 \quad (3)$$

-8

می‌دانیم چهار نوکلتوئید A, B, C و T الفبای ژنوم موجودات زنده هستند. با سه A ، یک C ، دو G و یک T چند رشته متفاوت به طول هفت می‌تواند به وجود آید؟

$$420 \quad (2) \quad 35 \quad (1)$$

$$4^7 \times 35 \quad (4) \quad 4^7 \quad (3)$$

-۹

اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل دو بخشی $K_{n,5}$ باشد، مجموع تمام

درآیه‌های ماتریس A^2 برابر است با:

- | | | |
|---------|-------|-----|
| ۱۶۵ (۱) | 60 | (۲) |
| ۳۴۱ (۴) | 330 | (۳) |

-۱۰

فرض کنید $n \geq 3$ عدد صحیح باشد. چند درخت بر چسب‌گذاری شده با مجموعه رأس‌های $\{1, 2, \dots, n\}$ و دقیقاً دو رأس درجه یک وجود دارد؟

$$\frac{(n-1)!}{2} \quad (1) \quad (n-1)! \quad (2)$$

$$\frac{n!}{2} \quad (3) \quad n^{n-2} \quad (4)$$

-۱۱

فرض کنید T درخت دودویی با رأس‌های $\{A, B, C, D, E\}$ و ریشه B باشد. اگر پیمایش میان ترتیب درخت $ABDCE$ باشد، کدام گزینه نمی‌تواند پیمایش پیش ترتیب آن باشد؟

- | | |
|---------------|---------------|
| B A D E C (۲) | B A C D E (۱) |
| B A C E D (۴) | B A D C E (۳) |

-۱۲

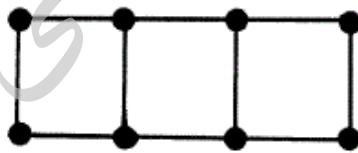
فرض کنید G گرافی همبند با تعداد فرد راس باشد. کدام شرط تضمین نمی‌کند که گراف اویلری است؟

- (۱) هر راس روی یک دور باشد.
 (۲) درجه هر راس زوج باشد.

- (۳) در متمم گراف درجه هر راس زوج باشد.
 (۴) هر یال روی تعداد فرد دور قرار داشته باشد.

-۱۳

به چند راه می‌توان رأس‌های گراف زیر را با ۳ رنگ متمایز رنگ کرد به‌طوری که هر دو رأس مجاور ناهمرنگ باشند؟



۸۱ (۱)

۴۸ (۲)

۱۶۲ (۳)

۳۸۴ (۴)

-۱۴

دنیاله $\{a_n\}_{n \geq 0}$ با شرایط اولیه $a_0 = 1$ و $a_1 = 2$ و رابطه بازگشتی

$$\frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

که به ازای هر $n \geq 1$ برقرار است، داده شده است.

تعداد صفرهای سمت راست a_{100} (در نمایش دهدھی) کدام است؟

- | | | |
|--------|------|-----|
| ۲۴ (۲) | 16 | (۱) |
| ۵۶ (۴) | 30 | (۳) |

-۱۵

یک تاس را شبیه استاندارد می‌نامیم اگر روی وجههای آن، اعداد ۲۴۳ و ۸۱ و ۲۷ و ۹ و ۳ و ۱ نوشته شده باشد. مجموع حاصل از ریختن ۳ تاس شبیه استاندارد می‌توان چند عدد مختلف باشد؟

- | | | |
|--------|------|-----|
| ۲۸ (۲) | 27 | (۱) |
| ۵۶ (۴) | 54 | (۳) |

-۱۶

فرض کنید val مجموعه همه ارزش گذاری‌های گزاره‌ای تعریف شده روی اتم‌ها و $\overline{\text{val}}$ مجموعه همه گسترش‌های اعضای val به مجموعه همه فرمول‌های گزاره‌ای باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (فرض می‌شود که کار دینال خانواده اتم‌ها χ است).

$$|\text{val}| = |\overline{\text{val}}| = \chi^0 \quad (1)$$

$$|\overline{\text{val}}| = \chi^0, |\text{val}| = \chi^0 \quad (2)$$

$$|\overline{\text{val}}| = \chi^0, |\text{val}| = \chi^0 \quad (3)$$

$$|\text{val}| = |\overline{\text{val}}| = \chi^0 \quad (4)$$

-۱۷

فرض کنید $L = \{P, Q\}$ که در آن P و Q محمول‌های تک موضوعی هستند. فرض کنید A یک مجموعه ۳ عضوی است. به چند طریق می‌توان A را به ساختاری برای L تبدیل کرد که در آن تعبیرهای P و Q اشتراک ناتهی داشته باشند؟

۱۶ (۱)

۲۷ (۲)

۳۲ (۳)

۳۷ (۴)

-۱۸

کدام یک از زوج فرمول‌های زیر با هم هم‌ارز هستند؟

$$<(A \rightarrow B) \rightarrow A, A> \quad (1)$$

$$<(A \wedge (B \rightarrow C)), (A \wedge B) \rightarrow (A \wedge C)> \quad (2)$$

$$<(A \wedge (B \rightarrow C)), A \rightarrow (B \wedge C)> \quad (3)$$

$$<(A \rightarrow (B \rightarrow C)), (A \rightarrow B) \wedge C> \quad (4)$$

-۱۹ تعریف کنید

$$S(p, q, r) = (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$$

آنگاه:

(۱) مجموعه $\{S\}$ کامل است.(۲) مجموعه $\{S, T\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه‌ی سره آن چنین نیست.(۳) مجموعه $\{S, \perp\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه‌ی سره آن چنین نیست.(۴) مجموعه $\{S, T, \perp\}$ کامل تابعی است اما هیچ زیرمجموعه‌ی سره آن چنین نیست.

-۲۰

کدام یک از ادعاهای زیر در مورد دستگاه استنتاج طبیعی (ND) درست نیست؟

- ۱) در هر برهان برای $P \vee \neg P$ از قاعده‌ی برهان خلف (RAA) استفاده می‌شود.
- ۲) اگر گزاره‌ای برهان داشته باشد آنگاه بی‌نهایت برهان خواهد داشت.
- ۳) حذف قاعده‌ی برهان خلف (RAA) و افزودن اصل $A \rightarrow \neg A$ قدرت دستگاه را تغییر نمی‌دهد.

۴) می‌توان یکی از دو قاعده‌ی حذف $\wedge E$ را حذف کرد بدون آنکه دستگاه استنتاج ضعیف شود.

-۲۱

با فرض اینکه جمله $p \vee q \vee r$ جمله p را نتیجه می‌دهد تعیین کنید با گزاره‌های p, q, r چند جمله دو به دو ناهم ارز می‌توان ساخت؟

- | | |
|--------|--------|
| ۲۴ (۲) | ۱۶ (۱) |
| ۶۴ (۴) | ۳۲ (۳) |

-۲۲

فرض کنید $\Sigma = \{p_i \leftrightarrow p_j : i, j \in \mathbb{N}\}$ و $\bar{\Sigma}$ مجموعه نتیجه‌های Σ باشد.

آنگاه:

- ۱) کامل نیست و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر نیست.
- ۲) کامل نیست و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر است.
- ۳) کامل است و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر است.
- ۴) کامل است و $\bar{\Sigma}$ تصمیم پذیر نیست.

-۲۳

در منطق مرتبه اول، کدام مورد همواره برقرار است؟

- $$\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \quad (۱)$$
- $$\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \exists x\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(y)) \quad (۲)$$
- $$\vdash \exists x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \quad (۳)$$
- $$\vdash (\forall x\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \quad (۴)$$

-۲۴

کدام گزینه هم ارز نرمال پیشوندی با فرمول زیر است؟
 $\exists x\varphi(x) \rightarrow \forall x\exists y\psi(x, y)$

- $$\forall x\exists y(\neg\varphi(x) \vee \psi(x, y)) \quad (۲) \quad \forall x\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(x, y)) \quad (۱)$$
- $$\forall x\forall z\exists y(\varphi(x) \rightarrow \psi(z, y)) \quad (۴) \quad \forall z\forall x\exists y(\psi(z, y) \vee \neg\varphi(x)) \quad (۳)$$

-۲۵

مجموعه $\{p \rightarrow (p \leftrightarrow r), q \rightarrow (\neg q \leftrightarrow r)\}$ کدام جمله زیر را نتیجه نمی‌دهد؟

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| $p \rightarrow r$ (۲) | $p \rightarrow \neg q$ (۱) |
| $\neg q \wedge \neg r$ (۴) | $\neg q \vee \neg r$ (۳) |

-۲۶

فرمول $\forall x \exists y \forall z \varphi$ با کدامیک از فرمولهای زیر ناسازگار است؟

(۱) $\exists x \neg \exists y \exists z \varphi$

(۲) $\forall x \forall y \exists z \varphi$

(۳) $\forall x \exists y \forall z \neg \varphi$

(۴) $\forall x \forall z \exists y \neg \varphi$

-۲۷

کدامیک از مجموعه‌های زیر از فرمولهای مرتبه اول ناسازگار است؟

(۱) $\{\exists y \exists x \forall z (C(x, y, z) \rightarrow \neg C(x, x, x))\}$

(۲) $\{\forall x (A(x) \rightarrow B(x)), \forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))\}$

(۳) یک ترم $\{ \forall x A(x) \} \cup \{ \neg A(t) : t \in T \}$

(۴) $\{\forall x \exists y B(x, y) \rightarrow \neg \exists y \forall x B(x, y), \exists x B(x, x)\}$

-۲۸

کاردینال مجموعه همه رابطه‌های منطقی چون * که رابطه‌ای \rightarrow و \sim را بتوان

بر حسب * نوشت، چند است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

-۲۹

کدامیک از مجموعه‌های زیر از فرمولهای گزاره‌ای، سازگار است؟

(۱) $\{p_1 \rightarrow p_r, \neg p_r \rightarrow \neg p_r, p_1 \wedge \neg p_r\}$

(۲) $\{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi : \varphi, \psi\}$

(۳) $\{p_1 \rightarrow p_r, p_1 \rightarrow \neg p_r, p_1 \wedge p_r\}$

(۴) $\{p_1 \rightarrow (\neg p_r \rightarrow p_r), (p_1 \vee p_r) \rightarrow \neg p_r, p_1 \rightarrow (\neg p_r \rightarrow p_r)\}$

-۳۰

کدامیک از مجموعه‌های زیر از فرمولهای گزاره‌ای کامل نیست؟

(۱) $\{p_1, p_1 \leftrightarrow p_r, p_r \leftrightarrow p_r, \dots\}$

(۲) $\{\neg p_1, p_1 \vee p_r, p_1 \vee p_r \vee p_r, \dots\}$

(۳) $\{p_1 \downarrow p_r, p_r \downarrow p_r, p_r \downarrow p_r, \dots\}$ (که در آن \downarrow رابطه Nor است)

(۴) $\{P_1, P_r, P_r, \neg(p_1 \vee p_r \vee p_r)\}$

آزمان

-۳۱ اگر برنامه زیر، $f(x)$ را محاسبه کند، مقدار $f(5)$ چقدر است؟

```

IF x ≠ 0 Goto A
Goto E
[A] x ← x - 1
If x ≠ 0 Goto B
Y ← Y + 1
Goto E
[B] x ← x - 1
IF x ≠ 0 Goto A
Goto E

```

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

-۳۲ فرض کنید که برنامه P عدد $1 - 2^{46} 5^{27} 3^7$ باشد. در این صورت برنامه P :

- (۱) حداقل دارای ۵ خط دستور است.
- (۲) دارای یک دستور بروجسپدار است.
- (۳) برای ورودی $x_1 = 2$ خروجی ۱ را می‌دهد.
- (۴) برای ورودی $x_1 = 0$ خروجی ۰ را می‌دهد.

-۳۳ فرض کنید A ، B و C سه مجموعه دو بدو مجزا هستند. (یعنی $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \emptyset$) توابع محاسبه‌پذیر جزئی به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \cup B \\ 2 & x \in C \\ \uparrow & \text{o.w.} \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} \uparrow & x \in A \cup C \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \uparrow & x \in B \cup C \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

کدام گزاره صحیح است؟

- (۱) A ، B و C همگی مجموعه‌های بازگشتی هستند.
- (۲) هیچ کدام r.e نیستند.
- (۳) A ، B و C همگی مجموعه‌های r.e هستند ولی هیچ کدام بازگشتی نیستند.
- (۴) بازگشتی است ولی A و B بازگشتی نیستند.

-۳۴ قوار دهید:

$$\text{FIN} = \{x \mid x \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad W_x\}$$

$$\text{TOT} = \{x \mid \Phi_x \text{ تابع تام است}\}$$

$$K = \{x \mid \Phi_x(x) \downarrow\}$$

کدام گزاره صحیح است؟

$$K \not\leq_m \text{TOT} \quad \bar{K} \not\leq_m \text{FIN} \quad (1)$$

$$K \leq_m \text{TOT} \quad \bar{K} \not\leq_m \text{FIN} \quad (2)$$

$$K \leq_m \text{TOT} \quad \bar{K} \leq_m \text{FIN} \quad (3)$$

$$K \not\leq_m \text{TOT} \quad \bar{K} \leq_m \text{FIN} \quad (4)$$

-۳۵ کدام گزاره غلط است؟

(۱) مجموعه‌های r.e تحت اشتراک و اجتماع بسته هستند.

(۲) M_i ها ماشین تورینگ هستند و $V = \{(M_1, M_2, M_3) \mid L(M_1) = L(M_2)L(M_3)\}$ یک مجموعه r.e نیست.(۳) مجموعه $\{M\}$ یک ماشین تورینگ است که روی ورودی W می‌ایستد $S = \{(M, w) \mid$ یک مجموعه r.e نیست.(۴) مجموعه $\{M_i\}$ ها ماشین تورینگ هستند و $T = \{(M_1, M_2) \mid L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset\}$ یک مجموعه r.e است.

-۳۶ کدام گزاره صحیح است؟

(۱) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A \leq_m B$.(۲) مجموعه بازگشتی و $-m$ - کامل موجود است.(۳) Φ_x تابع یک به یک نیست $A = \{x \mid A \text{ یک مجموعه r.e}\}$ است.(۴) اگر A یک مجموعه r.e باشد که \bar{A} نامتناهی و شامل هیچ مجموعه r.e نامتناهی نباشد، آنگاه A بازگشتی نیست.-۳۷ کدام گزینه غلط است؟ \leq_t Turing reducibility \leq_m many-one reducibility \leq_l one-one reducibility

$$\leq_l \subseteq \leq_t \subseteq \leq_m \quad (1)$$

(۲) هر سه رابطه بازتابی و تراکندری هستند.

$$\bar{A} \leq_m \bar{B} \quad (2)$$

(۳) اگر و تنها اگر $A \leq_m B$ نباشد آنگاه B نیز r.e نیست.

-۳۸ برای $A \subseteq \mathbb{N}$ قرار دهید $D = \{\deg_T(A) \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ و $a = \deg_T(A) = \{B \mid B \equiv_T A\}$. برای (D, \leq) که در آن $A \leq_T B$ اگر و تنها اگر $b \leq a$ باشد، کدام گزینه غلط است؟

- (۱) D, \leq یک شبکه توزیع پذیر است.
 - (۲) D, \leq کراندار است (یعنی دارای مینیمم و ماکزیمم)
 - (۳) D, \leq یک نیم شبکه فصلی است.
 - (۴) عضو ماکسیمم (D, \leq) درجه مسئله توقف است.

-۳۹- برای دو مجموعه A و B تعریف می‌کنیم:

کدام گزینه غلط است؟

$$B \leq_T A \oplus B, A \leq_T A \oplus B \quad (1)$$

$$(A \oplus B) \oplus C \equiv_T A \oplus (B \oplus C) \quad (r)$$

(۳) مجموعه‌های ساده $A \oplus B$ و B موجودند که A (simple) ساده نباشد.

$A \oplus B \leq_T C$ آنگاه $B \leq_T C$, $A \leq_T C$ اگر (۴)

- ۴۰ -

۱) تابع محاسبه‌پذیر f چنان موجود است، که برای هر y داریم.

۲) مجموعه محاسبه نایذری A چنان موجود است که

(۳) محمول محاسبه‌پذیر $R(x,y)$ موجود است که مجموعه $\{y \mid (\forall t)R(t,y)\}$ e نیست.

۴) اگر محمول (X) فقط موقعی درست باشد که برنامه‌ی با کد $G(X)$ روی ورودی (X) متوقف شود، آنگاه H یک محمول محاسبه‌ی بذیر است.

- ۴۱ - کدام گزینه صحیح است؟

۱) تست کردن اینکه یک تابع، تابع ثابتی است تصمیم‌پذیر است.

۲) تست کردن اینکه خروجی دو تابع دلخواه داده شده پیکسان است تصمیم‌پذیر است.

(۳) تست کردن اینکه دامنه یکتابع محاسبه‌پذیر جزئی متناهی است تصمیم‌پذیر است.

۴) تست کردن اینکه دامنه یکتابع محاسبه‌پذیر جزئی هم - متناهی (cofinite) است تصمیم‌نایپذیر است.

-۴۲- اگر $P = NP$ باشد، آنگاه هر زبان متعلق به P ، NP - کامل است.

Σ^* - کامل است بجز \emptyset و $NP(2)$

NP - کامل است بجز Ø

Σ^* - کامل است یعنی $NP(\Sigma)$

-۴۳

کدام یک از زبان‌های زیر قابل تشخیص توسط یک ماشین تورینگ هستند. M یک ماشین تورینگ است.

$$L_H = \{ \text{cod}(M) \neq x \mid x \in \{\circ, *\}^* \} : i$$

$$L_{\text{empty}} = \{ \text{cod}(M) \mid L(M) = \emptyset \} : ii$$

$$L_{MM'} = \{ \text{cod}(M) \neq \text{cod}(M') \mid L(M) \subseteq L(M') \} : iii$$

$$L = \{ \text{cod}(M) \mid \circ \circ \notin L(M) \} : iv$$

$$L = \{ \text{cod}(M) \mid \circ \circ \in L(M) \} : v$$

(۱) و ii

(۲) ii و iv

(۳) فقط v

(۴) ii و v

-۴۴

کدام یک از مسائل زیر unsolvable نیست؟

(۱) تست اینکه یک برنامه دلخواه روی یک ورودی خاص توقف می‌کند.

(۲) تعیین اینکه یک اتومات‌ها با پایان داده شده برای یک زبان، مینیمم است.

(۳) چاپ تمام جملات درست درباره ریاضیات که هیچ کدام غلط نیست.

(۴) تعیین اینکه یک جمله از منطق محمولات مرتبه اول معتبر است یا نه.

-۴۵

فرض کنید $N \subseteq A$ ، کدام یک از گزاره‌های زیر با بقیه معادل نیست؟

(۱) A دامنه یکتابع محاسبه‌پذیر است.

(۲) A برد یکتابع محاسبه‌پذیر است.

(۳) A توسط یک فرمول \sum_1 قابل تعریف است.

(۴) A توسط یک فرمول \prod_1 قابل تعریف است.