



305
F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)

آزمون ورودی
دوره دکتری (نیمه‌متراکز) داخل - سال ۱۳۹۶

رشته امتحانی مهندسی مکانیک - دینامیک، کنترل و ارتعاشات (کد ۲۳۲۳)

تعداد سؤال: ۴۵
مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی - دینامیک پیشرفته - ارتعاشات پیشرفته - کنترل پیشرفته)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.
استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.
اسفندماه - سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متغلبین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱- با فرض اینکه $-\pi < x < \pi$ ، $x = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(nx)$ و $-\pi < x < \pi$ ، $|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

آنگاه سری فوریه مثلثاتی تابع $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi \\ 0, & -\pi < x \leq 0 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx)$

(۲) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx)$

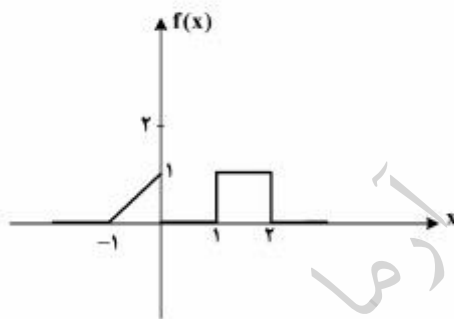
(۳) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx)$

(۴) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^k \sin(kx)$

۲- برای تابع نشان داده شده در شکل، چنانچه نمایش انتگرال فوریه آن را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x] d\omega$$

آنگاه حاصل انتگرال $\int_0^{\infty} [A(\omega)]^2 d\omega$ کدام است؟



- (۱) ۰
- (۲) $\frac{2}{3\pi}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳- اگر $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2\omega}{1+\omega^2} \sin \omega x d\omega$ ، آنگاه $I = \int_0^{\infty} f(x) \sin^2 x dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{2\pi}{10}$
- (۲) $\frac{2\pi}{5}$
- (۳) $\frac{5\pi}{12}$
- (۴) $\frac{8\pi}{25}$

۴- معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx} + u_{yy} + u_y - u = 0$ در داخل مستطیل $a < x < b$ و $0 < y < 1$ به همراه شرایط مرزی $u(a, y) = u(b, y) = 0$ و $u(x, 0) = 0$ داده شده است. اگر برای این مسئله

$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x, y)$ باشد، که در آن c_k ها ضرایب ثابت هستند، آنگاه تابع $u_k(x, y)$ کدام است؟

$$(e^{\gamma y} - e^{r\gamma y}) \sin \alpha_k (b-x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b+a}, r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma(1 + \alpha_k^2)}}{\gamma} \quad (1)$$

$$(e^{\gamma y} - e^{r\gamma y}) \sin \alpha_k (b-x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma \alpha_k^2}}{\gamma} \quad (2)$$

$$(e^{\gamma y} - e^{r\gamma y}) \sin \alpha_k (b+x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma(1 + \alpha_k^2)}}{\gamma} \quad (3)$$

$$(e^{\gamma y} - e^{r\gamma y}) \sin \alpha_k (b-x), \alpha_k = \frac{k\pi}{b-a}, r = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma(1 + \alpha_k^2)}}{\gamma} \quad (4)$$

۵- برای حل مسئله مقدار مرزی غیرهمگن داده شده با شرایط اولیه و مرزی همگن به صورت زیر:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-x) \sin t = \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) = u(x, 0) = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \end{cases}$$

می‌توان از بسط فوریه به صورت زیر استفاده نمود.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \sin(n\pi x), \quad F(x, t) = (1-x) \sin t = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \sin(n\pi x)$$

کدام یک از عبارتهای زیر صحیح است؟

$$u'_n(t) - n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{\gamma}{n\pi} \sin t \quad (1)$$

$$u'_n(t) - n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\gamma \sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \sin t \quad (2)$$

$$u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\gamma \sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{\gamma}{n\pi} \sin t \quad (3)$$

$$u'_n(t) + n^2 \pi^2 u_n(t) = \frac{\sin t}{n\pi}, \quad F_n(t) = \frac{1}{n\pi} \sin t \quad (4)$$

۶- مسئله مقدار اولیه $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ، $-\infty < x < \infty$ ، $t > 0$ با شرایط اولیه $\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$ ، $y(x, 0) = e^{-|x|}$ با

فرض آن که پاسخ مسئله به شکل $y(x, t) = \int_0^\infty [a(\omega) \cos(\omega x) + b(\omega) \sin(\omega x)] \cos(\omega ct) d\omega$ باشد،
 آنگاه $a(\omega)$ و $b(\omega)$ ، کدام است؟

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, b(\omega) = 0 \quad (2) \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, a(\omega) = 0 \quad (1)$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, a(\omega) = 0 \quad (3) \qquad a(\omega) = \frac{1}{\pi(1+\omega^2)}, b(\omega) = 0 \quad (4)$$

۷- به ازای کدام ثابت‌های γ ، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma w = 0$ دارای جواب کراندار غیر صفر

به صورت $w(x, y) = F(x)G(y)$ ، در تمام ربع اول صفحه xy می‌باشد؟

$$\gamma < 0 \quad (1) \qquad \gamma > 0 \quad (2)$$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \quad (3) \qquad \text{مسئله جواب ندارد} \quad (4)$$

۸- اگر $z = x + iy$ عدد مختلط باشد، آنگاه $\text{Im}\left(\frac{z}{\pi} \cdot \cosh z\right)$ ، (قسمت موهومی) کدام است؟

$$\frac{x}{\pi} \sinh x \sin y + \frac{y}{\pi} \cosh x \cos y \quad (2) \qquad \frac{x}{\pi} \cosh x \cos y - \frac{y}{\pi} \sinh x \sin y \quad (1)$$

$$-\frac{x}{\pi} \sinh x \sin y + \frac{y}{\pi} \cosh x \cos y \quad (4) \qquad \frac{x}{\pi} \sinh x \cos y + \frac{y}{\pi} \cosh x \sin y \quad (3)$$

۹- اگر $\text{Im}(\text{Log} \frac{z-1}{z+1}) = c$ (قسمت موهومی) و c ثابت و مخالف صفر باشد، آنگاه بیان این معادله بر حسب x و y کدام است؟

$$x^2 + (y - \tan c)^2 = \frac{1}{\cos^2 c} \quad (2) \qquad x^2 + (y - \cot c)^2 = 1 \quad (1)$$

$$x^2 + (y - \tan c)^2 = \tan^2 c \quad (4) \qquad x^2 + (y - \cot c)^2 = \frac{1}{\sin^2 c} \quad (3)$$

۱۰- حداکثر مقدار $|e^{z-i}|$ ، در ناحیه $|z| \leq \frac{1}{4}$ ، کدام است؟

$$e \quad (2) \qquad 1 \quad (1)$$

$$\frac{e}{2} \quad (4) \qquad e^2 \quad (3)$$

۱۱- تصویر نیم صفحه سمت چپ محور موهومی تحت نگاشت $w = \tanh z$ ، کدام است؟

(۱) نیم صفحه سمت راست محور موهومی

(۲) نیم صفحه پایینی محور حقیقی

(۳) نیم صفحه بالایی محور حقیقی

(۴) نیم صفحه چپ محور موهومی

۱۲- اگر $f(z)$ یک تابع تام (در کل صفحه مختلط تحلیلی)، $f(0) = 1$ و $|f(z) + i - z^2| \leq 2$ برای هر $z \in \mathbb{C}$ که در آن $i = \sqrt{-1}$ ، آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) i

۱۳- در بسط تیلور تابع $f(z) = z \sin z$ حول $z = i$ ، ضریب $(z - i)^\Delta$ کدام است؟

(۱) $\frac{i}{\Delta!} (\sinh 1 + \Delta \cosh 1)$

(۲) $\frac{i}{\Delta!} (\cosh 1 + \Delta \sinh 1)$

(۳) $\frac{i}{\Delta!} (\sinh 1 + \cosh 1)$

(۴) $\frac{i}{\Delta!} (\cosh \Delta + \sinh \Delta)$

۱۴- اگر C مربع $|x| + |y| = 4$ پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_C \frac{z}{1+e^z} dz$ ، کدام است؟

(۱) 0

(۲) $2\pi^2 i$

(۳) $4\pi^2 i$

۱۵- اگر تابع مختلط $f(z)$ دارای سری لوران $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ در طوق $1 - \delta < |z| < 1 + \delta$ ، $\delta > 0$ باشد و قرار

دهیم $F(\theta) = f(e^{i\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$ ، آنگاه بیان c_n بر حسب $F(\theta)$ کدام است؟

(۱) $c_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} F(\theta) d\theta$

(۲) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} F(\theta) d\theta$

(۳) $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} F(\theta) d\theta$

(۴) $c_n = 0$

دینامیک پیشرفته:

۱۶- فرفره مخروطی دارای جرم m و گشتاور اینرسی $I_x = I_y = I$ و $I_z = \frac{I}{4}$ می‌باشد. اگر فرفره آزادانه توسط اتصال کاسه - ساچمه‌ای در A با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_s حول Z بچرخد، سرعت زاویه‌ای تقدیمی آن حول محور

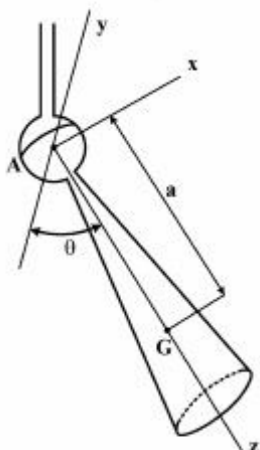
قائم در $\theta = 45^\circ$ ، از کدام معادله به دست می‌آید؟

(۱) $\Omega^2 - \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_s \Omega - \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Mga}{I} = 0$

(۲) $\Omega^2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_s \Omega - \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Mga}{I} = 0$

(۳) $\Omega + \frac{4Mga}{I\omega_s} = 0$

(۴) $\Omega - \frac{4Mga}{I\omega_s} = 0$



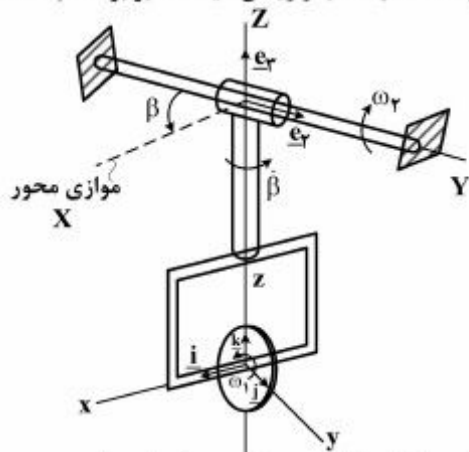
۱۷- در سیستم ژيروسکوپی زیر، روابط زیر برقرار است.

$$\underline{e}_\varphi = -\cos\beta \underline{i} + \sin\beta \underline{j}$$

$$\underline{i} = \dot{\beta} \underline{j} + \omega_\varphi \sin\beta \underline{k}$$

$$\underline{e}_\varphi = -\omega_\varphi (\sin\beta \underline{i} + \cos\beta \underline{j})$$

که در آن \underline{i} و \underline{j} مشتقات زمانی بردارهای یکه هستند. مؤلفه در امتداد Y شتاب زاویه‌ای دیسک، برابر کدام است؟



$$\omega_1 \dot{\beta} + \dot{\omega}_\varphi \sin\beta + \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (1)$$

$$\omega_1 \dot{\beta} - \dot{\omega}_\varphi \sin\beta - \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (2)$$

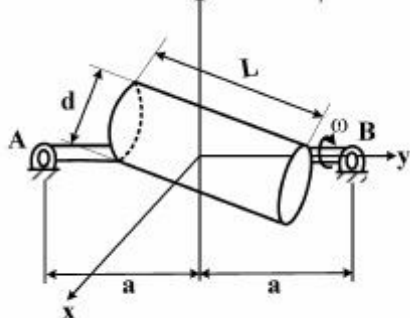
$$\omega_1 \dot{\beta} - \dot{\omega}_\varphi \sin\beta + \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (3)$$

$$\omega_1 \dot{\beta} + \dot{\omega}_\varphi \sin\beta - \dot{\beta} \omega_\varphi \cos\beta \quad (4)$$

۱۸- استوانه‌ای همگن به جرم m روی محوری که توسط یاتاقان‌های A و B نگهداشته می‌شود، سوار شده است. محور

تحت کوپل $M\hat{j}$ قرار داشته و به دلیل وجود اصطکاک سرعت زاویه‌ای آن ثابت و برابر $\omega\hat{j}$ می‌باشد. مؤلفه قائم

عکس‌العمل یاتاقان A در لحظه‌ای که محور استوانه از صفحه افقی عبور می‌کند، کدام است؟ Z



$$\sqrt{2}mg \quad (1)$$

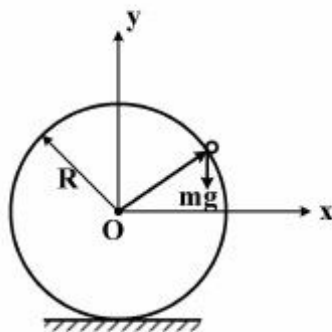
$$\frac{mg}{2} \quad (2)$$

$$mg \quad (3)$$

$$\frac{mg}{4} \quad (4)$$

۱۹- یک ذره به جرم m روی سطح خارجی یک حلقه ثابت به شعاع R در حرکت است. در چه لحظه‌ای ذره سطح را

$$\text{ترک خواهد کرد؟ } K = \sqrt{\frac{rg}{R}}$$

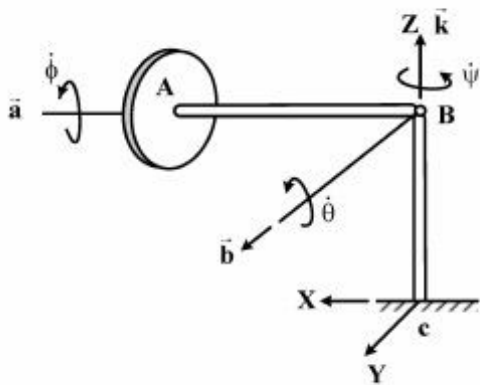


$$t = \frac{(-1 + \sin\theta)\sqrt{2(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2(1 + \sin\theta)}}{2}\right)}{k\sqrt{1 - \sin\theta}} \quad (1)$$

$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{2(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2(1 + \sin\theta)}}{2}\right)}{k(1 - \sin\theta)} \quad (2)$$

$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{2(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{(1 + \sin\theta)}/2}\right)}{k\sqrt{1 + \sin\theta}} \quad (3)$$

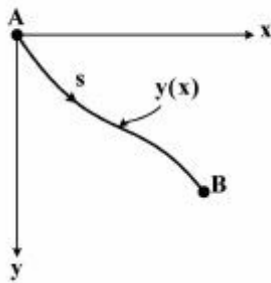
$$t = \frac{(1 - \sin\theta)\sqrt{(1 + \sin\theta)} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 + \sin\theta}}{2}\right)}{k\sqrt{1 - \sin\theta}} \quad (4)$$



۲۰- شتاب زاویه‌ای جسم AB، کدام است؟

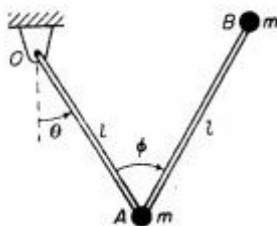
- (۱) $(\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{i} + (\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{j} + (\ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{k}$
- (۲) $(\ddot{\psi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{i} + (\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{j} + (\ddot{\psi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{k}$
- (۳) $(\ddot{\theta} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{i} + (\ddot{\phi} + \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{j} + (\ddot{\phi} + \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{k}$
- (۴) $(\ddot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\psi})\mathbf{i} + (\ddot{\theta} + \dot{\phi}\dot{\psi})\mathbf{j} + (\ddot{\psi} - \dot{\phi}\dot{\theta})\mathbf{k}$

۲۱- دو نقطه A و B در یک صفحه عمودی مفروض است. مسیری از A به B که ذره‌ای به جرم m تحت نیروی گرانش، بدون اصطکاک، در کوتاه‌ترین زمان، در امتداد آن می‌لغزد، از کدام معادله به دست می‌آید؟



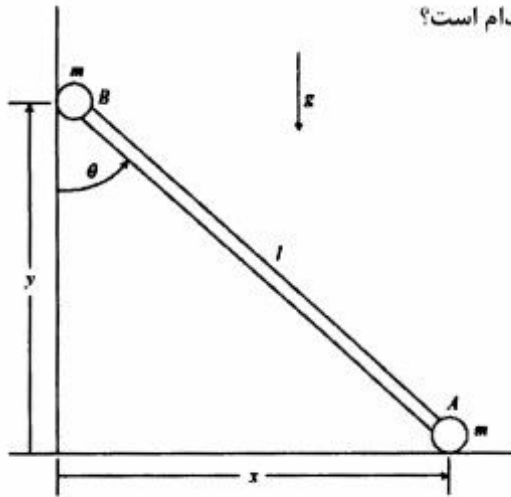
- (۱) $y + y'^2 + yy'' = 0$
- (۲) $1 + y' + y'^2 y'' = 0$
- (۳) $y + y' + y'^2 y'' = 0$
- (۴) $1 + y'^2 + 2yy'' = 0$

۲۲- جرم‌های ذره‌ای A و B، هر کدام با جرم m به میله‌های بدون جرم با طول l متصل‌اند. میله‌ها در A و O لولا شده‌اند. با فرض اینکه همه حرکت در یک صفحه افقی باشد، و با فرض شرایط اولیه $\theta(0) = \phi(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0, \dot{\phi}(0) = \omega_0$ ، رابطه بین دو سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ و $\dot{\phi}$ بر حسب تابعی از زاویه ϕ ، برابر کدام است؟



- (۱) $\dot{\theta} = \left(\frac{2 - 3 \cos \phi}{1 - \cos \phi}\right) \dot{\phi}$
- (۲) $\dot{\theta} = \left(\frac{2 - \cos \phi}{2 + \cos \phi}\right) \dot{\phi}$
- (۳) $\dot{\theta} = \left(\frac{1 - \cos \phi}{3 - 2 \cos \phi}\right) \dot{\phi}$
- (۴) $\dot{\theta} = \left(\frac{2 + 3 \cos \phi}{1 + \cos \phi}\right) \dot{\phi}$

۲۳- به هریک از دو سر میله بدون جرمی به طول l مطابق شکل زیر، جرم m متصل شده است و روی دو سطح بدون اصطکاک تکیه داده است. از این حالت رها می شود. در صورتی که فرض شود میله در صفحه قائم حرکت می کند، سرعت زاویه ای میله هنگامی که B به سطح افقی می رسد، کدام است؟



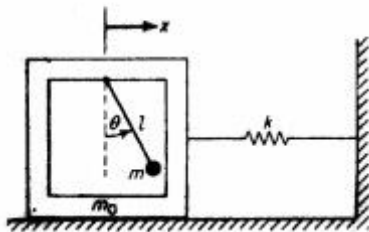
$$\frac{g}{l} \sin \theta \quad (۱)$$

$$\frac{g}{l} \cos \theta \quad (۲)$$

$$\frac{g}{l \cos \theta} \quad (۳)$$

$$\frac{g}{l \sin \theta} \quad (۴)$$

۲۴- در داخل جعبه ای با جرم m_0 یک آونگ ساده با جرم متمرکز m و طول l نصب شده است. این جعبه به همراه یک فنر با سختی k تشکیل یک سیستم جرم فنر افقی می دهد که می تواند روی یک صفحه افقی بدون اصطکاک حرکت افقی انجام دهد. معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت x ، کدام است؟



$$(m_0 + m)\ddot{x} - 2ml\dot{\theta} \sin \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + kx = 0 \quad (۱)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \quad (۲)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} + 2ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0 \quad (۳)$$

$$(m_0 + m)\ddot{x} - ml\ddot{\theta} \cos \theta + ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + kx = 0 \quad (۴)$$

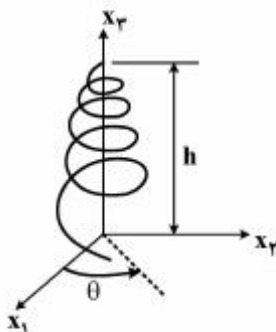
۲۵- ذره ای در مسیر مارپیچ دوکی شکل تحت تأثیر نیروی جاذبه به سمت پایین در حرکت است، به طوری که:

$$x_1 = a\theta \cos \theta$$

$$x_2 = a\theta \sin \theta$$

$$x_3 = h - a\theta$$

شتاب مماسی ذره بر حسب پارامتر θ ، کدام است؟ (a ثابت است).



$$a_t = a\dot{\theta}^2 (\tau + \theta^2)^{\frac{1}{2}} + a\ddot{\theta} \theta / (\tau + \theta^2)^{\frac{1}{2}} \quad (۱)$$

$$a_t = a\ddot{\theta} (\tau + \theta) + a\dot{\theta}^2 \theta / (\tau + \theta) \quad (۲)$$

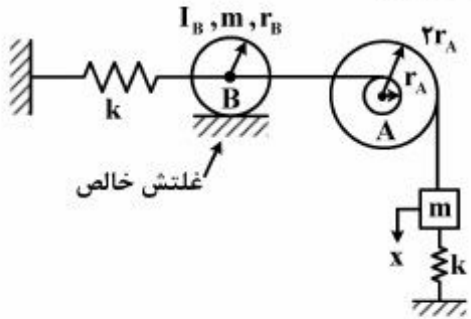
$$a_t = a\sqrt{\tau + \theta^2} \left(\ddot{\theta} + \frac{\theta \dot{\theta}^2}{\tau + \theta^2} \right) \quad (۳)$$

$$a_t = a\theta \left(\ddot{\theta} + \frac{\theta \dot{\theta}^2}{\tau + \theta^2} \right) \quad (۴)$$

ارتعاشات پیشرفته:

۲۶- در سیستم زیر موقعیت x از تعادل استاتیکی جرم m اندازه گیری شده و از اصطکاک در قرقره A و جرم آن صرف نظر می شود. استوانه B بر روی سطح غلتش بدون لغزش می کند. با توجه به مقادیر عددی داده شده،

فرکانس طبیعی سیستم چند $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ است؟ (I_B حول مرکز جرم استوانه است.)



$r_A = 8 \text{ cm}$

(۱) $۲,۲۰۸۶$

$r_B = ۱۰ \text{ cm}$

(۲) $۲,۲۱۴۰$

$I_B = ۱۰ \text{ kgm}^۲$

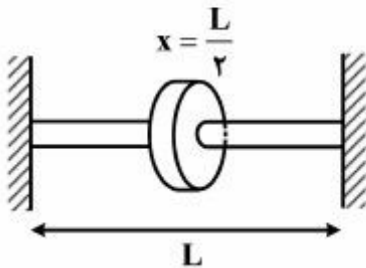
(۳) $۴,۸۷۸۰$

$m = ۵ \text{ kg}$

(۴) $۱۴,۱۴۲۱$

$k = ۱۰۰۰ \frac{\text{N}}{\text{m}}$

۲۷- معادله فرکانسی ارتعاشات پیچشی سیستم زیر شامل یک شفت با دو سر گیردار و حامل یک دیسک در مرکز آن، کدام است؟ (J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع شفت، J_0 ممان اینرسی دیسک و c ثابت موج است.)

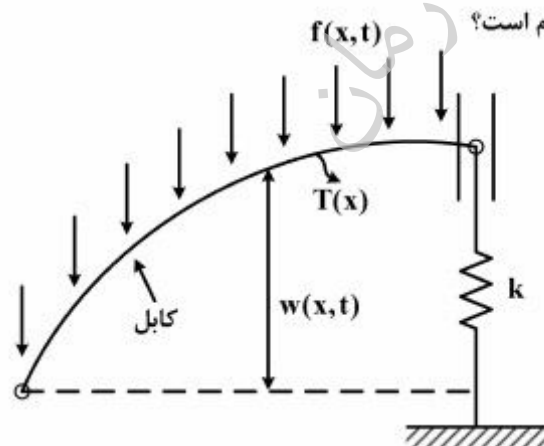


(۱) $\sin \frac{\omega L}{2c} = \frac{GJL}{J_0 c^2}$

(۲) $\tan \frac{\omega L}{2c} = \frac{2c GJL}{\omega L J_0 c^2}$

(۳) $\cos \frac{\omega L}{2c} = \frac{GJ_0 L}{J_0 c^2}$

(۴) $\tan \frac{\omega L}{c} = \frac{c GJ_0 L}{\omega L J_0 c^2}$



۲۸- معادله ارتعاشی کابل تحت بارگذاری گسترده $f(x,t)$ ، کدام است؟

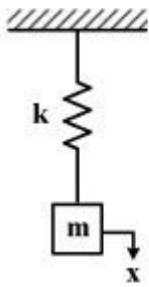
(۱) $-\frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

(۲) $-T(x) \frac{\partial w}{\partial x} + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

(۳) $\frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

(۴) $\frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

۲۹- معادله ارتعاشات سیستم روبه‌رو، حول وضعیت تعادل استاتیکی با فرض آنکه نیروی فنر با مجذور جابه‌جایی در سختی فنر (k) برابر باشد، کدام است؟



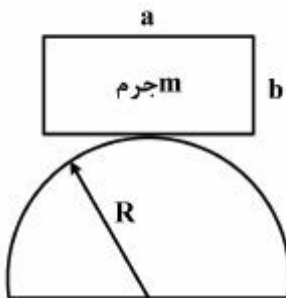
$$m\ddot{x} + kx^2 + 2\sqrt{kmg}x = 0 \quad (1)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 + \sqrt{mgk}x = 0 \quad (2)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 + mg = 0 \quad (3)$$

$$m\ddot{x} + kx^2 = 0 \quad (4)$$

۳۰- بلوک مستطیلی شکل به ابعاد a و b با چگالی یکسان بر روی یک سطح نیم‌دایره به شعاع R نوسان می‌کند. با فرض آن‌که هیچ‌گونه لغزش صورت نمی‌گیرد و وضعیت ارتعاشات در حالت ماناست. انرژی جنبشی بلوک به صورت تابعی از پارامترهای ارائه شده و زاویه بلوک با افق θ ، کدام است؟



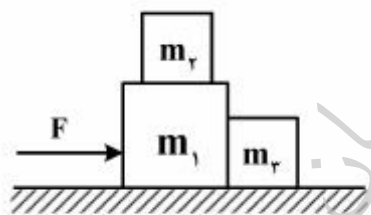
$$\frac{1}{2}m \left[R^2\dot{\theta}^2 + \frac{a^2 + b^2}{12} \right] \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{24}m(a^2 + b^2)\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{b^2}{4} + R^2\dot{\theta}^2 \right) \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}m \left[\frac{b^2}{3} + R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{12}a^2 \right] \dot{\theta}^2 \quad (4)$$

۳۱- سه بلوک مطابق شکل زیر، قرار گرفته‌اند. نیروی F به یکی از آن‌ها وارد می‌شود. چنانچه ضریب اصطکاک بین هر دو سطح μ باشد، حداکثر مقدار نیروی F بدون آنکه بلوک m_2 بر روی بلوک m_1 بلغزد، کدام است؟



$$2\mu g(m_1 + m_2 - m_3) \quad (1)$$

$$3\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (2)$$

$$2\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (3)$$

$$\mu g(m_1 + m_2 + m_3) \quad (4)$$

۳۲- روش‌های استخراج معادلات حرکت اجسام صلب، کدام است؟

(۱) دالامبر، هیلز، اصل همیلتون، گیبس - اپل

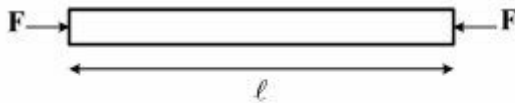
(۲) کینز، دالامبر، اصل همیلتون، گیبس - اپل

(۳) هیلز، اصل همیلتون، کپلر، دالامبر

(۴) کینز، دالامبر، اصل همیلتون، کپلر

۳۳- میله‌ای به طول l در ابتدا تحت نیروهای مساوی F در هر دو انتها فشرده می‌شود. اگر نیروهای فشاری یک مرتبه حذف شوند، پاسخ ارتعاشات طولی میله کدام است؟

(c ثابت موج) (فشرده‌گی واحد δ در $t=0$ ، به صورت $\delta x = \frac{\delta l}{\gamma}$ است.)



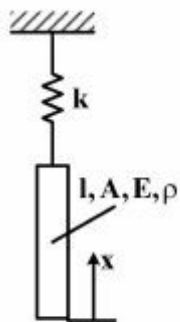
$$\frac{4\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\lambda\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\lambda\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (3)$$

$$\frac{4\delta l}{\pi^2} \sum_{n=1,2,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right) \quad (4)$$

۳۴- برای ارتعاش طولی محور الاستیک که جنس و مقطع آن (A, ρ, E) ثابت است، معادله فرکانسی کدام است؟



$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

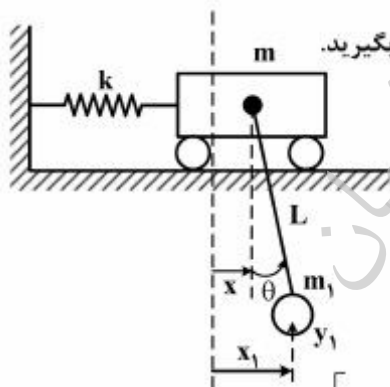
$$\sin \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (1)$$

$$\cos \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (2)$$

$$\tan \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (3)$$

$$\cot \frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A} \quad (4)$$

۳۵- معادلات حرکت سیستم زیر، کدام است؟ دامنه ارتعاشات را کوچک در نظر بگیرید.



$$\begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 L \\ m_1 L & (m + m_1) L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

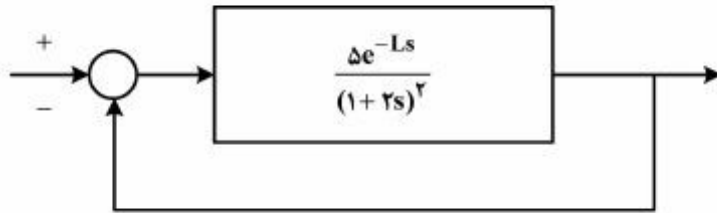
$$\begin{bmatrix} m & (m + m_1) L \\ (m + m_1) L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (m + m_1) g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m & m_1 L \\ m_1 L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} m + m_1 & m_1 L \\ m_1 L & m_1 L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1 g L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

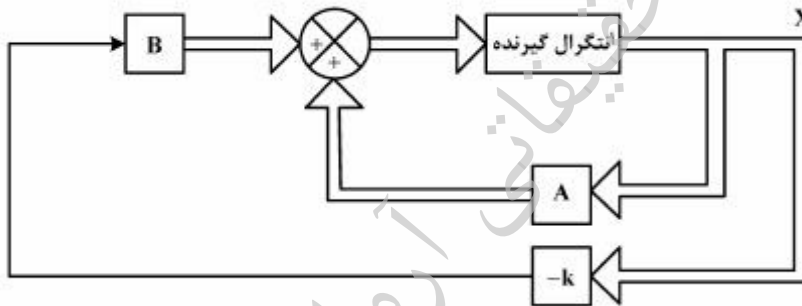
کنترل پیشرفته:

۳۶- در سیستم مدار بسته شکل زیر، سیستم اصلی مرتبه ۲ با تأخیر خالص L ثانیه است. مقدار زمان تأخیر L چند ثانیه باشد، تا حد فاز در این سیستم مدار بسته مساوی 45° شود؟



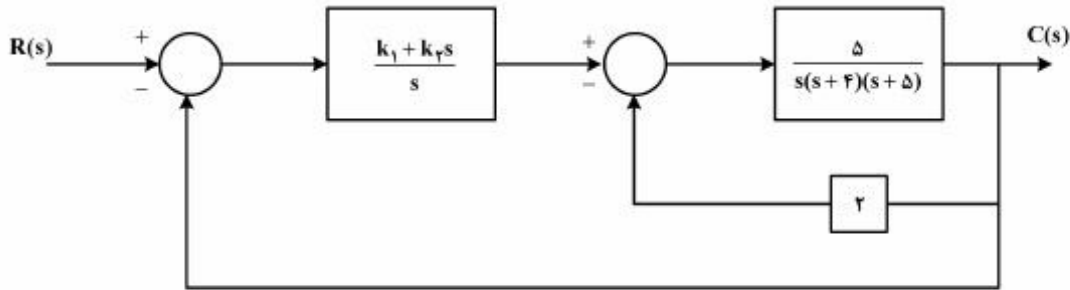
- (۱) ۰٫۱۴۲
- (۲) ۱٫۶۶
- (۳) ۲٫۳۱
- (۴) ۳٫۲۴

۳۷- با توجه به نمودار بلوکی زیر، اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس بهره k چقدر باشد، تا قطب‌های رگولاتور در $S_{1,2} = -1 \pm j$ قرار گیرند؟



- (۱) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$
- (۲) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$
- (۳) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$
- (۴) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$

۳۸- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک در شکل زیر نمایش داده شده است. معادلات حالت این سیستم در فرم مشاهده‌پذیر (OCF)، کدام است؟



$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -10 - \Delta k_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta k_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad 0 \quad 0] x \quad (1)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & -10 - \Delta k_2 & -20 & -9 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [\Delta k_1 \quad \Delta k_2 \quad 0 \quad 0] x \quad (2)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\Delta k_1 & 1 & 0 & 0 \\ -10 - \Delta k_2 & 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \Delta k_1 \\ \Delta k_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x \quad (3)$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 1 & 0 \\ -10 - \Delta k_2 & 0 & 0 & 1 \\ -\Delta k_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta k_2 \\ \Delta k_1 \end{bmatrix} u(t), c(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] x \quad (4)$$

۳۹- در سیستم کنترل زیر:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = [1 \ 0 \ 2] \mathbf{x}$$

تابع تبدیل سیستم کدام است و سیستم، کنترل پذیر و شهودپذیر هست یا نه؟

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (1) \text{ شهودپذیر و کنترل پذیر}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (2) \text{ شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (3) \text{ غیر شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1} \quad (4) \text{ غیر شهودپذیر و غیر کنترل پذیر}$$

۴۰- یک سیستم خطی درجه دو LTI با شرایط اولیه داده شده است و پاسخ سیستم به پله واحد به صورت زیر است:

$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0$$

پاسخ سیستم مشابه فوق، با شرایط اولیه یکسان نسبت به ورودی $2u_{-1}(t)$ (پله با دامنه ۲) به صورت زیر است:

$$y(t) = 1 - 1.5e^{-t} + 0.7e^{-2t}$$

پاسخ حالت صفر (Zero state) به ورودی پله و تابع تبدیل سیستم کدام است؟

$$y_{zs}(s) = \frac{5}{s} + \frac{2}{s^2+1}, \quad H(s) = \frac{5s^2 + 5 + 2s}{s(s^2+1)} \quad (1)$$

$$y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s} - \frac{0.5}{s+1} - \frac{1.3}{s+2}, \quad H(s) = \frac{-1.3s^2 - 0.8s + 1}{(s+1)(s+2)} \quad (2)$$

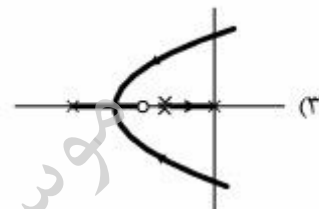
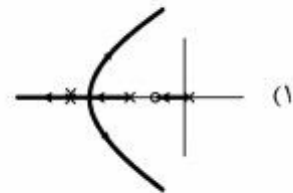
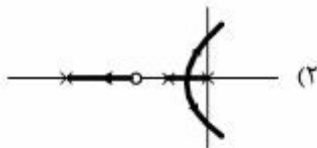
$$y_{zs}(s) = \frac{0.5}{s+1} - \frac{1}{s+2} + 5, \quad H(s) = \frac{s^2 + 2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} \quad (3)$$

$$y_{zs}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} - \frac{0.5}{s+2}, \quad H(s) = \frac{s^2 + s^2 + s}{(s+1)(s+2)} \quad (4)$$

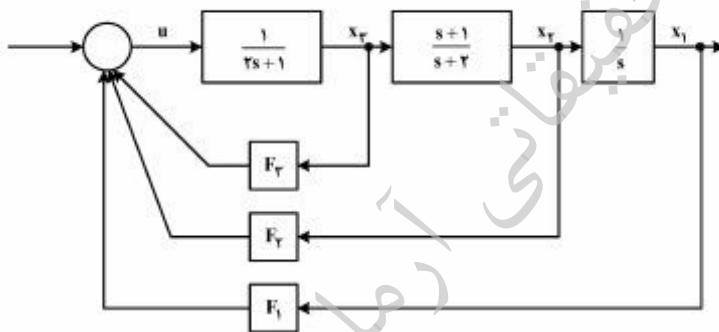
۴۱- یک سیستم مدار - بسته دارای معادله مشخصه زیر است:

$$1 + kG(s) = 1 + \frac{k(s+1)}{s(s+2)(s+4)^2} = 0$$

دیاگرام مکان ریشه‌های آن، کدام است؟



۴۲- برای تقریر قطب‌های مدار - بسته سیستم زیر در نقاط $-1 \pm j$ ، $-3 \pm j$ انتخاب مناسب F_i ، $i = 1, 2, 3$ کدام است؟



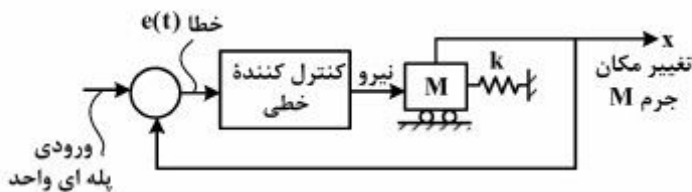
(۱) $F = [-10, -15, -5]$

(۲) $F = [-20, -8, -1]$

(۳) $F = [8, 20, 5]$

(۴) $F = [1, -10, -5]$

۴۳- در سیستم جرم و فنر زیر جرم روی سطح افقی بدون اصطکاک جابه‌جا می‌شود. هدف کنترل پاسخ $y = x(t)$ است که x تغییر مکان جرم M است. مقادیر M و k به ترتیب 1 kg و $\frac{N}{m}$ است. یکی از انواع کنترل کننده‌های خطی زیر را طوری انتخاب کنید که نسبت استهلاک سیستم مدار بسته $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ و حداکثر خطای حالت ماندگار به ازای ورودی مبنای پله‌ای واحد مساوی 0.1 شود.



نام کنترل کننده	$G_c(s)$
P-action:	k_c
PI-action	$k_c + k_I \frac{1}{s}$
PD-action	$k_c + k_D s$
PID-action	$k_c + k_I \frac{1}{s} + k_D s$

- (۱) کنترل کننده PID با ضرایب $k_c = 12$ ، $k_I = 6.2$ ، $k_D = 25$
- (۲) کنترل کننده PI با ضرایب $k_c = 24$ ، $k_I = 9.4$
- (۳) کنترل کننده PD با ضرایب $k_c = 36$ ، $k_D = 8.9$
- (۴) کنترل کننده P با ضریب $k_c = 6$

۴۴- برای سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان رابطه $\dot{x} = Ax$ ، $y = Cx$ برقرار است که در آن $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

پاسخ این سیستم به ازای شرایط اولیه $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به صورت $y(t) = 2e^{-5t}$ در آمده است. آیا می‌توان در مورد مشاهده پذیری این سیستم اظهار نظر نمود، چرا و با چه استدلالی؟ (توجه شود که خروجی اسکالر است و C ماتریس سطری 1×2 است.)

- (۱) بله می‌توان اظهار نظر نمود و سیستم مشاهده پذیر نیست زیرا همه مقادیر ویژه در پاسخ ظاهر نشده‌اند.
- (۲) بله می‌توان اظهار نظر نمود و سیستم مشاهده پذیر است زیرا بردارهای ویژه ماتریس A برهم عمود نیستند.
- (۳) خیر نمی‌توان اظهار نظر نمود زیرا شرایط اولیه در امتداد هیچ کدام از بردارهای ویژه ماتریس A نیست.
- (۴) خیر نمی‌توان اظهار نظر کرد زیرا ماتریس سطری C داده نشده است.

۴۵- در تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی خطی بدون ورودی به صورت $\dot{x} = Ax$ و $x(0) = x_0$ که در آن x بردار ستونی با n جزء و A ماتریس مربع $n \times n$ است. حل سیستم به صورت $x(t) = e^{At} x_0$ داده شده است. A ماتریس مربع با درایه‌های حقیقی و نامتغیر با زمان است. در مورد صحت رابطه $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t} \cdot e^{A_2 t}$ کدام پاسخ صحیح است؟ (A_1, A_2 هم بعد هستند.)

- (۱) فقط وقتی صحیح است که A_1 و A_2 قطری باشند.
- (۲) فقط وقتی صحیح است که $A_1 A_2 = A_2 A_1$ باشد.
- (۳) در هیچ شرایطی صحیح نیست.
- (۴) همواره صحیح است.