



نام :  
نام خانوادگی :  
محل امضاء :

عصر جمعه  
۹۲/۱۱/۱۸



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.  
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی دوره های کارشناسی ارشد ناپیوسته داخل - سال ۱۳۹۳**

**ریاضیات و کاربردها - کد ۱۲۰۸**

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۳۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی	۳۰	۱	۳۰
۲	دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبنای علوم ریاضی، مبنای ماتریس ها و جبر خطی، مبنای آنالیز ریاضی، مبنای آنالیز عددی و مبنای احتمال)	۴۵	۳۱	۷۵
۳	دروس تخصصی (آنالیز ریاضی، مبنای ترکیبات، مبنای جبر و بهینه سازی خطی)	۶۰	۷۶	۱۳۵

بهمن ماه سال ۱۳۹۲

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی باشد.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ و تکثیر سوالات پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

**Part A: Vocabulary**

**Directions:** Choose the word or the phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark your answer sheet.

- 1- Police officers should be commended for their \_\_\_\_\_ service to the community.  
1) benevolent                      2) harsh                      3) hasty                      4) peculiar
- 2- Despite her \_\_\_\_\_ arguments, the candidate attracted an enthusiastic following.  
1) plausible                      2) wholesome                      3) specious                      4) thorough
- 3- Toni has been \_\_\_\_\_ to achieve musical recognition for the past ten years.  
1) prevailing                      2) displaying                      3) appreciating                      4) striving
- 4- Thousands of families came here seeking \_\_\_\_\_ from the civil war.  
1) remedy                      2) refuge                      3) remnant                      4) rebellion
- 5- Many persons in the \_\_\_\_\_ were awakened by the blast, and some were thrown from their beds.  
1) thrill                      2) urbanity                      3) vicinity                      4) fatigue
- 6- I cannot believe that your parents would \_\_\_\_\_ such rude behavior.  
1) endorse                      2) hinder                      3) postpone                      4) seclude
- 7- Although I had already broken most of her dishes, Jacqueline was \_\_\_\_\_ enough to continue letting me use them.  
1) thrifty                      2) indigent                      3) financial                      4) magnanimous
- 8- Even when someone has been found innocent of a crime, the \_\_\_\_\_ often remains.  
1) endeavor                      2) stigma                      3) urge                      4) quest
- 9- I was badly scared when the explosion made the whole house \_\_\_\_\_.  
1) vacillate                      2) resurge                      3) decline                      4) quake
- 10- The poison produced by the frog's skin is so \_\_\_\_\_ that it can paralyze a bird or a monkey immediately.  
1) pungent                      2) swift                      3) lethal                      4) treacherous

**Part B: Cloze Passage**

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark your answer sheet.

Air pollution has always accompanied civilizations. Pollution started from the prehistoric times when man created the first fires. According to (11) \_\_\_\_\_ in the journal *Science*, "soot (12) \_\_\_\_\_ on ceilings of prehistoric caves provides ample evidence of the high levels of pollution that was associated with (13) \_\_\_\_\_." The forging of metals appears to be a key turning point (14) \_\_\_\_\_ significant air pollution levels outside the home. Core samples of glaciers in Greenland indicate (15) \_\_\_\_\_ in pollution associated with Greek, Roman and Chinese metal production, but at that time the pollution was comparatively less and could be handled by nature.

- 11- 1) a 1983 article                      2) article for 1983                      3) a 1983<sup>rd</sup> article                      4) article in 1983
- 12- 1) was found                      2) having found                      3) found                      4) to be found
- 13- 1) inadequate ventilating open fires                      2) inadequate ventilation of open fires  
3) open fires inadequate ventilation                      4) open fires in inadequate ventilation
- 14- 1) for creation in                      2) in creation for                      3) in the creating for                      4) in the creation of
- 15- 1) increases                      2) increased                      3) the increasing                      4) they increased

**PART C: Reading Comprehension**

***Directions:*** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then, mark the correct choice on your answer sheet.

**Passage 1:**

Given a table of data, we may decide to use only a subset of the tabular points to determine our approximation. When we analyze the error in polynomial exact-matching approximation, we will see that the error at any evaluation argument depends upon the number of points we use, the choice of points, and derivatives of the functions being approximated. It will often be the case that too many as well as too few points will result in an approximation of low accuracy.

If one knows beforehand which data points are to be used in an approximation, the barycentric form of Lagrange approximation provides a reasonable method for computation. In most cases, however, one does not know how many points will provide either the best approximation or an approximation of desired accuracy, because the function  $f$  being approximated is either not analytically known or too complicated to use to compute and evaluate derivatives of high order. We need a formulation that produces approximations using, successively, one data point, two data points, and so on, and that allows us to determine the optimum number of points during the computation. The Lagrange method is not satisfactory for this purpose because if we have used it to compute the approximation through  $N + 1$  points, a great deal of new work is required to evaluate the polynomial with a single point added. Each old Lagrange polynomial must be multiplied by a factor in both the numerator and the denominator and a new Lagrange polynomial term corresponding to the new data point must be computed. An alternative approach, the *Newton divided-difference formulation*, avoids this difficulty. The approach is based on attempting to write a series like the Taylor series that will permit us to increase the degree of the approximating polynomial by simply adding a term to the preceding approximation, where that term depends on a derivative of the function being approximated. If we have only a table of arguments and function values, we do not have available values for the derivative but these can be approximated using finite differences of the data values.

- 16- **Using a large number of points** -----.
- 1) can lead to exact results
  - 2) leads to a high accuracy
  - 3) may lead to a poor approximation
  - 4) is preferred to using a small number of points
- 17- **High order derivatives** -----.
- 1) can never be computed
  - 2) may not be easy to compute
  - 3) can easily be computed using enough data
  - 4) are approximated using Lagrange approximation
- 18- **Lagrange approximation is** ----- **for successive addition of data points.**
- 1) inappropriate
  - 2) quite efficient
  - 3) recommended
  - 4) the one to use

- 19- **The use of divided differences for computing interpolating polynomials of higher degrees -----.**
- 1) incurs new difficulties
  - 2) is as good as Lagrange method
  - 3) can lead to a different interpolating polynomial
  - 4) is preferred to Lagrange method, when points are added successively
- 20- **Interpolating polynomials can be constructed by -----.**
- 1) the Lagrange method only
  - 2) the *Newton* method only
  - 3) using high order derivatives
  - 4) both the Lagrange and the *Newton* methods

**Passage 2:**

Electric circuits are an obvious example where interconnections between objects play a central role. Circuit elements like transistors, resistors, and capacitors are intricately wired together. Such circuits can be represented and processed within a computer in order to answer simple questions like "Is everything connected together?" as well as complicated questions like "If this circuit is built, will it work?" Here, the answer to the first question depends only on the properties of the interconnections (wires), while the answer to the second requires detailed information about both the wires and the objects that they connect.

Another example is "job scheduling," where the objects are tasks to be performed, say in a manufacturing process, and interconnections indicate which jobs should be done before others. Here, we might be interested in answering questions like "When should each task be performed?"

A *graph* is a mathematical object that accurately models such situations. In this chapter, we'll examine some basic properties of graphs, and in the next several chapters we'll study a variety of algorithms for answering questions of the type posed above.

Actually, we've already encountered graphs in previous chapters. Linked data structures are actually representations of graphs, and some of the algorithms we'll see for processing graphs are similar to algorithms we've already seen for processing trees and other structures. For example, the finite-state machines of Chapters 19 and 20 are represented with graph structures.

- 21- **Graphs -----.**
- 1) can be used to formulate every problem
  - 2) are not appropriate for formulating most problems
  - 3) can be used to formulate connections between objects
  - 4) can only be used as data structures for simple problems
- 22- **Graphs are processed -----.**
- 1) by finite-state machines
  - 2) using linked data structures
  - 3) by using algorithms on certain data structures
  - 4) by natural formulations of objects and connections between them
- 23- **To determine when a task should be performed in a scheduling problem, -----.**
- 1) a graph may be used as a data structure
  - 2) processing of a tree is needed
  - 3) an electric circuit may be handy
  - 4) a finite-state machine should be constructed
- 24- **Linked data structures -----.**
- 1) are tree structures
  - 2) cannot represent graphs
  - 3) are ineffective structures
  - 4) can be used to formulate many problems

**25- Transistors, resistors, and capacitors are -----.**

- 1) used to monitor computer processing
- 2) appropriately represented by graph structures to be processed within a computer
- 3) artificially designed to have graph representations
- 4) prime examples of objects having disconnected structures within a computer

**Passage 3:**

The only exceptions occur when the rotation is through  $360^\circ$  (with eigenvectors everywhere) or through  $180^\circ$ . In the  $180^\circ$  case, the plane of the equator is filled with eigenvectors; every direction in this plane is exactly reversed, and the eigenvalue is  $-1$ . This equatorial plane is a case of a "two-dimensional eigenspace"; the single eigenvalue  $\lambda = -1$  has two independent eigenvectors, and therefore a plane of eigenvectors.

In some ways this is a good example, in other ways not. For one thing, eigenvalues are not generally  $\pm 1$ ; vectors are usually stretched or shrunk. More important, this was a rotation of three-dimensional space  $\mathbb{R}^3$ , but except for  $180^\circ$  and  $360^\circ$ , there was only one line of eigenvectors and we expect to find three. In an application to differential equations, we would need three different special solutions to match the initial conditions; one eigenvalue and one eigenvector are not enough. The way to find the other two is to admit the imaginary number  $i$ . If there are too few solutions in the real world  $\mathbb{R}^3$ , we look in the space  $\mathbb{C}^3$  of vectors with complex components. Allowing complex numbers, any  $n$  by  $n$  matrix will have  $n$  eigenvalues.

The real substance of this chapter, however, lies somewhere else. The most important thing to be done is to explain how a system of equations is decoupled by finding the eigenvectors. These eigenvectors are the "normal modes" of the system, and they act independently. We can watch the behavior of each eigenvector separately, and then combine these normal modes to find the solution. To say the same thing in another way, the underlying matrix has been diagonalized.

**26- The equator is filled with eigenvectors, because -----.**

- 1) it has  $-1$  as an eigenvalue
- 2) it has two independent eigenvectors
- 3) it is a two dimensional space
- 4)  $1$  is not one of its eigenvalues

**27- In an application to differential equations, one eigenvalue and one eigenvector are not enough -----.**

- 1) to satisfy the initial conditions
- 2) to derive the initial conditions
- 3) because at least one special solution is needed
- 4) to have more than one special solution

**28- A system of equations may be solved by ----- the eigenvectors.**

- 1) decoupling
- 2) using
- 3) separating
- 4) normalizing

**29- The space of vectors with complex entries are needed in order to -----.**

- 1) separate the eigenvectors
- 2) allow for real eigenvalues
- 3) identify the required eigenvalues
- 4) normalize the eigenvectors

**30- In the rotation of three-dimensional space, -----.**

- 1) three eigenvectors are needed to be identified
- 2) only one line of eigenvectors is enough, because the space is real
- 3) the three needed eigenvectors lie on one line of eigenvectors
- 4) three eigenvectors are imagined, but not required

۳۱- در کدام بازه سری  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{(n+1)3^n}$  همگرا است؟

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad (1)$$

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \quad (3)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \quad (2)$$

$$\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \quad (4)$$

۳۲- با فرض پیوستگی تابع  $g$ ، مقدار  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)g(t)dt}{\sin^2 x}$  کدام است؟

$$g(0) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}g(0) \quad (3)$$

$$2g(0) \quad (4)$$

$$1 \quad (2)$$

۳۳- مقدار  $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$  کدام است؟

$$\frac{\pi}{8} \quad (1)$$

$$2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2\sqrt{2} \quad (4)$$

۳۴- اگر  $\frac{d}{dx}(f(x)) = g(x)$  و  $\frac{d}{dx}(g(x)) = f(x)$ ، مقدار  $\frac{d^2}{dx^2}(f(x^3))$  کدام است؟

$$f(x^3) + g(x^6) \quad (1)$$

$$9x^4 f(x^3) + 6xg(x^6) \quad (3)$$

$$f(x^6) + g(x^3) \quad (2)$$

$$9x^4 f(x^6) + 6xg(x^3) \quad (4)$$

۳۵- مساحت ناحیه محدود به نمودار معادله  $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{2}{2}$

(۴) ۲

۳۶- اگر  $\theta$  زاویه بین بردار نرمال بر رویه  $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$  در

نقطه  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  و محور  $z$  ها باشد و  $L = \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} |\cos \theta|$ ، گزینه

صحیح کدام است؟

(۲)  $L = 0$

(۱)  $L = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۴)  $L = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(۳)  $L = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳۷- اگر  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 = 2\}$ ، مقدار انتگرال دوگانه

$\iint_D (x^2 - xy + y^2) dA$  کدام است؟

(۱)  $\frac{4\pi}{3}$

(۲)  $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$

(۳)  $\frac{8\pi}{3}$

(۴)  $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$

۳۸- برای ثابت  $k > 0$ ، اگر  $g(x, t) = \frac{x}{\sqrt{kt}}$  و  $f(x, t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2} du$

گزینه صحیح کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= x \frac{\partial f}{\partial t} \\ (2) \quad k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ (3) \quad k \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ (4) \quad k \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{aligned}$$

۳۹- بیشترین انحنای منحنی  $y = e^x$  در کدام نقطه اتفاق می افتد؟

$$\begin{aligned} (1) \quad (\ln 2, \sqrt{2}) \\ (2) \quad (-\ln 2, \sqrt{2}) \\ (3) \quad \left(-\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ (4) \quad \left(\frac{1}{2} \ln 2, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

دروس پایه مبانی علوم ریاضی

۴۰- کدام یک از گزاره‌های ذیل خاصیت مشخصه زیرینه (اینفیمم) را برای

$$\beta = \inf A$$

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon$$

$$(2) \quad \forall x \in A \exists \varepsilon > 0 \quad x < \beta + \varepsilon$$

$$(3) \quad \exists \varepsilon > 0 \forall x (x \in A \Rightarrow x < \beta + \varepsilon)$$

$$(4) \quad \forall x (x \in A \Rightarrow \beta \leq x) \& \forall \varepsilon > 0 \exists x \in A \quad x < \beta + \varepsilon$$

۴۱- فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  تابعی باشد به طوری که  $f^2 = I_X$  که در آن  $I_X$  بیانگر

تابع همانی روی  $X$  است. در این صورت:

$$(1) \quad f \text{ انعکاسی و متقارن است.} \quad (2) \quad f \text{ متقارن است.}$$

$$(3) \quad f \text{ انعکاسی و متعدی (تراگذری) است.} \quad (4) \quad f \text{ متعدی (تراگذری) است.}$$



۴۲- فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد و  $A \subseteq X$  و  $B \subseteq Y$ . کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

$$f^{-1}(f(A)) \subseteq A \quad (۲) \quad f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \quad (۱)$$

$$f(A^c) = (f(A))^c \quad (۴) \quad B \subseteq f(f^{-1}(B)) \quad (۳)$$

۴۳- کدام یک از نگاشت‌های زیر یک تناظر یک به یک (دو سوئی) بین بازه باز  $(-1, 1)$  و  $\mathbb{R}$  برقرار می‌کند؟

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (۲) \quad f(x) = \frac{x}{1-x} \quad (۱)$$

$$f(x) = \frac{1+|x|}{1-|x|} \quad (۴) \quad f(x) = \frac{x}{1-|x|} \quad (۳)$$

۴۴- هرگاه  $X$  یک مجموعه نامتناهی و  $Q$  مجموعه اعداد گویا باشد، آنگاه

(۱) تابعی یک به یک مانند  $f: Q \rightarrow X$  وجود دارد.

(۲) تابعی یک به یک مانند  $f: X \rightarrow Q$  وجود دارد.

(۳) اگر تابع  $f: X \rightarrow X$  یک به یک باشد آنگاه  $f$  پوشاست.

(۴) اگر  $f: X \rightarrow X$  پوشا باشد آنگاه  $f$  یک به یک است.

۴۵- اگر تابع  $f: A \rightarrow B$  پوشا باشد آنگاه:

$$\forall X (X \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(X)) = X) \quad (۱)$$

$$\forall Y (Y \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y) \quad (۲)$$

$$\forall X \forall Z (X, Z \subseteq A \Rightarrow f(X \cap Z) = f(X) \cap f(Z)) \quad (۳)$$

$$\exists X \exists Z (X, Z \subseteq A \& f(X \cup Z) \neq f(X) \cup f(Z)) \quad (۴)$$

۴۶- تحت کدام یک از شرایط زیر ماتریس  $A$  با یک ماتریس قطری متشابه است؟

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & -1 \end{bmatrix}$$

$$a = 0 \quad (1) \quad b = 0 \quad (2)$$

$$c = 0 \quad (3) \quad a + b + c = 0 \quad (4)$$

۴۷- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  مختلط باشد و برای هر  $X \in \mathbb{R}^n$

$$(بردارها را ستونی در نظر می‌گیریم) داشته باشیم  $X^T A X = 0$ .$$

که در آن  $X^T$  ترانزپوزیته  $X$  است، در این صورت:

$$A^T A^2 = 0 \quad (2) \quad A^T = -A \quad (1)$$

$$A = 0 \quad (4) \quad A^T = A \quad (3)$$

۴۸- فرض کنید  $V$  فضای برداری توابع پیوسته از مجموعه  $[0, 1]$  به  $\mathbb{R}$  روی میدان

$\mathbb{R}$  باشد. تبدیل خطی  $T: V \rightarrow V$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(f(x)) = \int_0^1 (3x^3 y - 5x^4 y^2) f(y) dy$$

در این صورت رتبه  $T$  برابر است با:

$$1 \quad (1) \quad 2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \text{ نامتناهی}$$

۴۹- دو جمله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

(\*) اگر به ازای بردار ثابت  $\mathbf{b}$ ، دستگاه  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  روی اعداد حقیقی بیش از یک جواب داشته باشد، آنگاه دستگاه  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  بی‌نهایت جواب دارد.

(\*\*) اگر  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  بردارهایی در  $\mathbb{R}^2$  باشند به طوری که هیچ دوتای آن‌ها هم راستا نباشند، آنگاه دستگاه  $\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$  که در آن  $\mathbf{A} = [\mathbf{u} \ \mathbf{v}]$ ، جواب یکتا دارد.

کدام گزینه صحیح است؟

(۱) فقط (\*) درست است. (۲) فقط (\*\*) درست است.

(۳) هر دو درست هستند. (۴) هر دو نادرست هستند.

۵۰- فرض کنید  $U_1, U_2, U_3$  سه زیر فضا از یک فضای برداری با بعد متنهایی

باشند به طوری که اشتراک هر دوتای آنها صفر است. کدام گزینه صحیح است؟

$$\dim \left( \sum_{i=1}^3 U_i \right) = \sum_{i=1}^3 \dim U_i \quad (۱)$$

$$\dim \left( \sum_{i=1}^3 U_i \right) + \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_2 + U_3) + \dim(U_1 + U_3) \quad (۲)$$

$$\leq \sum_{i=1}^3 \dim(U_i)$$

$$\dim \left( \sum_{i=1}^3 U_i \right) + \sum_{i=1}^3 \dim(U_i) \leq \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 + U_3) \quad (۳)$$

$$+ \dim(U_2 + U_3)$$

$$\dim \left( \sum_{i=1}^3 U_i \right) = \sum_{i=1}^3 \dim(U_i) + \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 + U_3) + \dim(U_2 + U_3) \quad (۴)$$

۵۱- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $۸ \times ۴$  باشد که درایه‌های آن اعدادی حقیقی هستند.

بعلاوه فرض کنید  $W_1 = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^4\}$  و  $W_2 = \{AY \mid Y \in \mathbb{C}^4\}$ . اگر

$W_1$  به عنوان زیر فضای  $\mathbb{R}^n$  بعدی و  $W_2$  به عنوان زیر فضای  $\mathbb{C}^m$  بعدی باشند، کدام مورد صحیح است؟

$$(۱) \quad m = n + 4$$

$$(۲) \quad n = 2m$$

$$(۳) \quad m = 2n$$

$$(۴) \quad m = n$$

دروس پایه - مبانی آنالیز ریاضی

۵۲- متر  $d$  را بر  $\mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(x, y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $x \rightarrow x_n$  در متر اقلیدسی، آنگاه  $x_n \rightarrow x$  در متر  $d$

(۲)  $(\mathbb{R}, d)$  یک فضای متریک کامل است.

(۳)  $(\mathbb{R}, d)$  یک فضای متریک کراندار است.

(۴) اگر  $U \subseteq \mathbb{R}$  نسبت به متر  $d$  باز باشد نسبت به متر اقلیدسی  $\mathbb{R}$  نیز باز است.

۵۳- فرض کنید متر  $d$  روی  $\mathbb{R}$  به صورت زیر تعریف شده باشد. ( $A^c$  متمم  $A$  است)

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \sqrt{x^2 + y^2} & x \neq y \end{cases}$$

هرگاه  $A \subseteq \mathbb{R}$ ، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $A \ni \circ$  آنگاه  $A^c$  باز است.

(۲) اگر  $A \ni \circ$  آنگاه  $A^c$  بسته است.

(۳) اگر  $A \ni \circ$  آنگاه  $A^c$  باز است.

(۴) اگر  $A \ni \circ$  آنگاه  $A^c \cup \{0\}$  بسته است.

۵۴- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱)  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  ناهمبند است.

(۲)  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$  همبند است.

(۳)  $\{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$  دارای نقطه حدی است.

(۴)  $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,0)\}$  فشرده است.

۵۵- اگر  $a_n = \sin(\frac{\pi}{n}) + \tan^{-1}(n) + \cos(n)$  مقدار  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$

برابر است با:

(۱)  $\frac{\pi}{2}$

(۲)  $1 + \frac{\pi}{2}$

(۳)  $(1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}$

(۴)  $1 + (1 + \frac{\pi^2}{4})^{-1}$

۵۶- فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای نزولی از اعداد حقیقی باشد و  $a_n \rightarrow 0$  در این

صورت سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

(۱) فقط در صورتی که  $\sum a_n$  همگرا باشد، همگراست.

(۲) فقط در صورتی که  $\sum a_n$  واگرا باشد، همگراست.

(۳) واگرا است.

(۴) همگرا است.

۵۷- فرض کنید سری توانی  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  بر  $\mathbb{R}$  همگرا باشد. کدام گزینه

صحیح است؟

(۱) اگر  $\{x : f(x) = 0\}$  نامشمارا باشد آنگاه  $f$  ثابت است.

(۲) اگر  $\{x : f'(x) = 0\}$  نامشمارا باشد آنگاه  $f$  ثابت است.

(۳) اگر  $\{x : f(x) = 0\}$  یا  $\{x : f'(x) = 0\}$  نامشمارا باشد آنگاه  $f$  ثابت است.

(۴) همه موارد صحیح است.

۵۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای متریک باشند و  $f : X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. کدام

گزینه پیوستگی تابع  $f$  را نتیجه نمی‌دهد؟

(۱) تصویر وارون هر مجموعه فشرده در  $Y$  توسط  $f$  در  $X$  فشرده است.

(۲) برای هر دنباله کوشی  $\{x_n\}$  در  $X$ ، دنباله  $\{f(x_n)\}$  در  $Y$  کوشی است.

(۳) تصویر وارون هر مجموعه بسته در  $Y$  توسط  $f$  در  $X$  فشرده است.

(۴) برای هر دنباله همگرای  $\{x_n\}$  در  $X$  دنباله  $\{f(x_n)\}$  در  $Y$  همگرا است.

۵۹- کدام یک از توابع زیر بر  $(0, \infty)$  پیوسته یکنواخت است؟

(۱)  $e^x$

(۲)  $x \ln x$

(۳)  $x \sin \frac{1}{x}$

(۴)  $x \sin x$

۶۰- کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرال پذیر ریمان باشد آنگاه تابع  $f$  بر  $[a, b]$  تابع اولیه (پادمشتق) دارد.

(۲) اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  تابع اولیه داشته باشد آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  انتگرال پذیر ریمان است.

(۳) اگر برای هر  $x \in [a, b]$  انتگرال  $\int_a^x f(t)dt$  موجود باشد آنگاه  $f$  بر  $[a, b]$  تابع اولیه دارد.

(۴) هیچ کدام

۶۱- فرض کنید  $f, g : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  توابع پیوسته باشند. مقدار

حد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x)g(x)dx \right)^{\frac{1}{n}}$  کدام است؟

(۲)  $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)$

(۱)  $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)g(x)$

(۴)  $\inf_{a \leq x \leq b} f(x)g(x)$

(۳)  $\sup_{a \leq x \leq b} f(x)$

۶۲- کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1-x)$  همگرای یکنواخت است.

(۲) دنباله توابع  $f_n(x) = x^n$  بر  $(0, 1)$  همگرای یکنواخت است.

(۳) اگر  $f_n$  به  $f$  و  $g_n$  به  $g$  همگرای یکنواخت بر  $\mathbb{R}$  باشند، آنگاه  $f_n g_n$  به  $fg$  همگرای یکنواخت بر  $\mathbb{R}$  است.

(۴) اگر  $0 \leq a < 1$ ، آنگاه سری  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  بر  $[-a, a]$  همگرای یکنواخت است.

$$-۶۳ \quad \text{هرگاه } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^3 + n^2}{n^3}, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} [nx] \quad \text{آنگاه کدام}$$

گزینه نادرست است؟

(۱)  $f$  بر هر بازه کراندار  $[a, b]$ ، به طور مطلق همگرای یکنواخت است.

(۲)  $f$  بر هر بازه کراندار  $[a, b]$ ، انتگرال ریمان دارد.

(۳)  $g$  بر هر بازه کراندار  $[a, b]$ ، به طور مطلق همگرای یکنواخت است.

(۴)  $g$  بر هر بازه کراندار  $[a, b]$ ، انتگرال ریمان دارد.

-۶۴ در یک دستگاه ممیز شناور برای نمایش اعداد حقیقی در مبنای ۲، با ۷ رقم

مانتیس و روش گرد کردن، فاصله بین عدد ۶۹ و نزدیک ترین عدد قابل نمایش

بزرگ تر از ۶۹ چقدر است؟

$$(۱) \frac{1}{64}$$

$$(۲) \frac{1}{2}$$

$$(۳) 1$$

$$(۴) 2$$

-۶۵ فرض کنید دنباله تکراری روش نیوتن برای حل معادله  $f(x) = 0$  به صورت

$$x_{n+1} = x_n (2 - Ax_n)$$

( $A$  عددی ثابت و غیر صفر است.)

$$(۱) f(x) = A - \frac{1}{x}$$

$$(۲) f(x) = \frac{2}{A} - x^2$$

$$(۳) f(x) = \sqrt{A} - x$$

$$(۴) f(x) = A - 2x^2$$



۶۶- تابع  $\sin x$  را با چه اندازه گام  $h$  باید جدول بندی کرد تا خطای حاصل از درونیابی

خطی از  $10^{-4} \times \frac{1}{2}$  بیشتر نشود؟

(۱)  $0.02$

(۲)  $0.03$

(۳)  $0.035$

(۴)  $0.04$

۶۷- در رابطه انتگرال گیری زیر، مقدار پارامتر  $A_1$  بر حسب  $a$  کدام گزینه باشد تا

روش انتگرال گیری مورد نظر دارای بیشترین دقت ممکن باشد؟

$$\int_{-1}^1 (a-x)f(x)dx \approx A_{-1}f(-1) + A_0f(0) + A_1f(1)$$

(۱)  $\frac{a}{3} + 1$

(۲)  $3a - \frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{3}{2}(a+1)$

(۴)  $\frac{1}{3}(-1+a)$

۶۸- فرض کنید  $A$ ، ماتریس  $n \times n$ ، حقیقی و وارون پذیر است.  $A$  دارای تجزیه LU

است که  $L$  پایین مثلثی با اعضای قطری واحد و  $U$  بالا مثلثی است، اگر  $A$

ماتریسی ..... باشد.

(۱) پاد متقارن

(۲) معین مثبت

(۳) متقارن

(۴) نواری

۶۹- فرض کنید  $f: s^2 \rightarrow \mathbb{R}, s = [1, \infty)$  و  $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1^2 + 27x_1 - x_1^2$ .

ماکسیمم محلی (موضعی) تابع  $f$  روی  $s^2$  کدام است؟

(۱) ۵۲

(۲) ۵۳

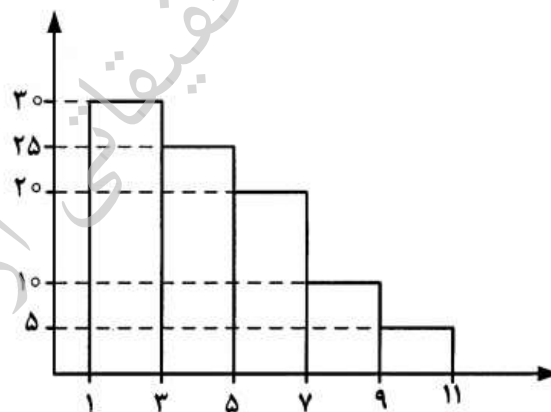
(۳) ۵۴

(۴) ۵۵

دروس پایه - مبانی احتمال

۷۰- اگر نمودار هیستوگرام فراوانی داده‌ها به صورت زیر باشد، مقدار  $Q_{0.60}$

(چندک  $0.60$ ) کدام است؟



(۱) ۴,۲۹

(۲) ۴,۶۹

(۳) ۴,۹۲

(۴) ۴,۹۶

۷۱- اگر قیمت کالایی امسال ۲۰ درصد نسبت به سال گذشته افزایش داشته باشد،

ضرب تغییرات قیمت کالا چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) تغییر نمی‌کند.

(۲) افزایش می‌یابد.

(۳) کاهش می‌یابد.

(۴) قرینه می‌شود.

۷۲- نامعادله  $X + Y + Z < 12$  در مجموعه اعداد صحیح نا منفی دارای چند جواب است؟

(۱) ۳۶۵ (۲) ۳۶۴

(۳) ۳۵۶ (۴) ۳۴۶

۷۳- چهار نفر اسم خود را روی ۴ کارت می‌نویسند و داخل جعبه‌ای می‌اندازند. اگر این چهار نفر هر کدام یک کارت از جعبه انتخاب کند، احتمال اینکه هیچکدام اسم خود را در نیاورند چقدر است؟

(۱)  $\frac{3}{8}$  (۲)  $\frac{2}{8}$

(۳)  $\frac{5}{16}$  (۴)  $\frac{7}{16}$

۷۴- از جعبه‌ای که حاوی ۵۰ لامپ است ۱۰ لامپ انتخاب می‌گردد. اگر لامپ‌های معیوب حداکثر ۱ باشد، جعبه انتخاب می‌شود در غیر این صورت جعبه رد می‌شود. اگر ۱۰ لامپ معیوب در جعبه وجود داشته باشد، احتمال انتخاب جعبه کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$  (۲)  $\frac{9}{49}$

(۳)  $\frac{\binom{40}{9}}{\binom{50}{10}}$  (۴)  $\frac{\binom{10}{1} \binom{40}{9}}{\binom{50}{10}} + \frac{\binom{40}{10}}{\binom{50}{10}}$

۷۵- اگر  $P(A|B) + P(A'|B') = 1$  باشد در این صورت: ( $A'$  مکمل  $A$  است)

(۱) دو پیشامد  $A$  و  $B$  از هم جدا هستند.

(۲) دو پیشامد  $A$  و  $B$  مستقلند.

(۳) دو پیشامد  $A$  و  $B$  مکمل هم هستند.

(۴) دو پیشامد  $A$  و  $B$  وابسته هستند.

۷۶- نگاشت  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  را با ضابطه  $T(x, y) = (x + y, x - y)$ ، در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟ ( $T'$  و  $T''$  مشتقات اول و دوم  $T$  هستند).

$$T'' = 0 \quad (1)$$

$$T''(0) = 0 \quad (2)$$

$$T'(0) = T \quad (3)$$

$$T' = T \quad (4)$$

۷۷- اگر  $T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  یک نگاشت خطی از  $\mathbb{R}^2$  به  $\mathbb{R}$  باشد و  $\{e_1, e_2, e_3\}$  پایه متعارف (اسـتاندارد)  $\mathbb{R}^2$  باشد و

$$Te_1 = 3, Te_2 = -\sqrt{3}, Te_3 = 2$$

$$\|T\| \text{ آنگاه برابر است با:}$$

$$3 \quad (1)$$

$$5 - \sqrt{3} \quad (2)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 + \sqrt{3} \quad (4)$$

۷۸- اگر  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی باشد که تمام مشتقات سویی (جهتی) آن در مبدأ در

جهت بردار دلخواه  $u \in \mathbb{R}^2$  یعنی  $D_u f(0, 0)$  موجود باشند، آنگاه:

(۱)  $f$  در  $(0, 0)$  پیوسته است.

(۲)  $f$  لزوماً در  $(0, 0)$  پیوسته نیست مگر آنکه  $D_u f(0, 0)$  به عنوان تابعی از  $u$  خطی باشد.

(۳)  $f$  لزوماً در  $(0, 0)$  پیوسته نیست حتی اگر  $D_u f(0, 0)$  به عنوان تابعی از  $u$  خطی باشد.

(۴)  $f$  لزوماً در  $(0, 0)$  پیوسته نیست مگر آنکه  $D_u f(0, 0)$  به عنوان تابعی از  $u$  مشتق پذیر باشد.

۷۹- اگر  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  دارای مشتقات جزئی کراندار باشد، آنگاه.....

(۱)  $f$  مشتق پذیر است.

(۲)  $f$  لزوماً پیوسته نیست.

(۳)  $f$  پیوسته است ولی لزوماً مشتق پذیر نیست.

(۴) در صورتی که یکی از مشتقات جزئی  $f$  ناپیوسته باشد،  $f$  نیز ناپیوسته است.

۸۰- اگر  $f$  تابعی حقیقی و مشتق پذیر بر  $\mathbb{R}^n$  و عدد صحیح  $k$  موجود باشد که برای هر اسکالر  $t \neq 0$  و هر  $x \in \mathbb{R}^n$ ،  $f(tx) = t^k f(x)$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$(1) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

$$(2) \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = kf(x)$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = kf(x)$$

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$$

۸۱- فرض کنید  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  تابعی خطی و وارون پذیر و  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  تابعی  $C^1$  باشد. اگر اعداد ثابت  $\alpha > 1$  و  $M > 0$  موجود باشند که به ازای هر  $x \in \mathbb{R}^n$ ،  $\|f(x)\| \leq M \|x\|^\alpha$ ، کدام گزینه صحیح است؟

(1)  $L+F$  در یک همسایگی صفر وارون پذیر است.

(2) صفر نقطه درونی برد  $L+F$  است.

(3) همسایگی باز  $V$  از صفر در  $\mathbb{R}^n$  و تابع  $H: V \rightarrow V$  یک به یک، پوشا و از

رده  $C^1$  موجودند که بر روی  $V$  داریم  $(F+L) \circ H = L$

(4) هر سه مورد

۸۲- اگر  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  و  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ یا } y \neq 0\}$  تابعی دلخواه باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(1) اگر  $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$  آنگاه  $f$  مستقل از متغیر  $x$  است.

(2) اگر  $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$  آنگاه  $f$  مستقل از متغیر  $y$  است.

(3) اگر  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$  آنگاه  $f$  تابع ثابت است.

(4) اگر  $f$  نسبت به متغیر  $x$  ثابت باشد، آنگاه  $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0$

۸۳- تابع  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x, y, z) = (ze^y, z^2x, xe^{2y})$$

تابع  $f$  با چه شرطی در یک همسایگی از  $(x, y, z)$  دارای وارون است؟

$$xz \neq 0 \quad (۱) \quad xy \neq 0 \quad (۲)$$

$$yz \neq 0 \quad (۳) \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \quad (۴)$$

۸۴- فرض کنید تابع  $F: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  به صورت زیر تعریف شده است:

$$F(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2) = (a_1 b_1 - e^{b_2} + a_3 - b_2, a_1 \cos b_2 + a_2 + 2b_1 b_2).$$

اگر  $a = (1, -1, -1)$  و  $b = (2, 0)$  آنگاه معادله  $F(a, b) = 0$  به صورت

$\phi(a) = b$  قابل حل است. ماتریس  $\phi'(a)$  کدام است؟

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (۲) \quad \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (۴) \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

۸۵- اگر  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  مشتق دوم پیوسته داشته باشد و  $\vec{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک

میدان برداری از کلاس  $C^2$  باشد. برای  $\vec{F} = \nabla u$  و  $\vec{G} = \nabla \times \vec{g}$  در حالت کلی

کدام گزینه صحیح است؟

$$\nabla \cdot \vec{G} = 0, \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \quad (۲) \quad \nabla \times \vec{G} = 0, \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (۱)$$

$$\nabla \cdot \vec{G} = 0, \nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (۴) \quad \nabla \cdot \vec{G} = \vec{g}, \nabla \cdot \vec{F} = u \quad (۳)$$

۸۶- اگر  $\gamma$  یک مسیر ساده بسته هموار در  $\mathbb{R}^2$  باشد که یکبار در جهت خلاف

عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود و  $\beta = \int_{\gamma} y dx$ ،  $\alpha = \int_{\gamma} x dy$  آنگاه:

(۱)  $\alpha = \beta$  و مقدار مشترک آن‌ها مساحت ناحیه محدود در درون  $\gamma$  است.

(۲)  $\alpha$  و  $\beta$  و مقدار مساحت درون  $\gamma$  هیچکدام ربطی به هم ندارند.

(۳)  $\beta$  مقدار مساحت ناحیه محدود درون  $\gamma$  است ولی  $\alpha$  لزوماً با آن برابر نیست.

(۴)  $\alpha$  مقدار مساحت ناحیه محدود درون  $\gamma$  است ولی  $\beta$  لزوماً با آن برابر نیست.

۸۷- برای تابع  $n$  متغیره  $f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1^k + \dots + x_{n-1}^k & x_n = 0 \\ 0 & x_n \neq 0 \end{cases}$  مقدار

انتگرال  $n$  گانه  $\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$  برابر است با:

(۱) ۰

(۲)  $\frac{n-1}{k+1}$

(۳)  $\frac{n-1}{(k+1)^2}$

(۴)  $\frac{n}{k+1}$

۸۸- اگر  $D$  ناحیه‌ای در ربع اول بین منحنی‌های

$y = x$  و  $y = \sqrt{ax}$  و  $xy = a^2$  باشد که  $a > 0$ ، مقدار انتگرال

$\int_D x^2 y^2 dA$  یک چند جمله‌ای درجه ... بر حسب  $a$  است.

(۱) ۳

(۲) ۵

(۳) ۷

(۴) ۹

۸۹- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱) هیچ  $n-1$  فرم  $w$  در  $\mathbb{R}^n$  وجود ندارد که  $dw = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$

(۲) اگر  $w$  فرمی روی مجموعه باز  $V$  و  $f$  تابعی مشتقپذیر روی  $V$  باشد

که  $f(x) \neq 0$  برای هر  $x \in V$  و  $d(fw) = 0$  آنگاه  $w \wedge dw = 0$

(۳) اگر  $w_1$  و  $w_2$  فرمهای کاملی باشد، آنگاه  $w_1 \wedge w_2$  یک فرم بسته است.

(۴) اگر  $w$  یک  $n-1$  فرم روی مجموعه باز  $V$  شامل مستطیل  $R$  در  $\mathbb{R}^n$  باشد،

$$\int_{\partial R} dw = \int_R w \quad \text{آنگاه}$$

۹۰- هرگاه  $w$  و  $\lambda$  به ترتیب  $k$  فرم و  $m$  فرمی از ردهی  $C^1$  در  $\mathbb{R}^n$  باشند، کدام

گزینه صحیح است؟

$$d(w \wedge \lambda) = (dw) \wedge \lambda + w \quad (۱)$$

$$d(w \wedge \lambda) = dw + (-1)^k \lambda \quad (۲)$$

$$d(w \wedge \lambda) = (dw) \wedge d\lambda \quad (۳)$$

$$d(w \wedge \lambda) = (dw) \wedge \lambda + (-1)^k w \wedge d\lambda \quad (۴)$$

دروس تخصصی - مبانی ترکیبات

۹۱- ضریب  $x^4 y^2 z^5 w^4$  در بسط  $(2x + \frac{1}{3}y + z + w)^{15}$  کدام است؟

$$\frac{15!}{5!(4!)^2 2!} \quad (۲) \qquad \frac{15!}{5!(4!)^2} \quad (۱)$$

$$\frac{15!}{5!4!3!2!} \quad (۴) \qquad \frac{15!}{5!(4!)^2 (8)} \quad (۳)$$



۹۲- فرض کنید دنباله  $\{a_n\}$  در رابطه بازگشتی  $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k-1}$  با  $a_0 = 1$

صدق کند. اگر  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  تابع مولد دنباله  $\{a_n\}$  باشد،  $f(x)$  در

کدام یک از معادلات زیر صدق می‌کند؟

$$(1) \quad f^2(x) - xf(x) + 1 = 0 \quad (2) \quad f^2(x) + xf(x) - 1 = 0$$

$$(3) \quad xf^2(x) - f(x) + 1 = 0 \quad (4) \quad xf^2(x) + f(x) - 1 = 0$$

۹۳- تعداد زیرمجموعه‌های  $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$  که در آن ۵ عضو ماکزیم آن مجموعه

است، برابر است با:

$$(1) \quad 16 \quad (2) \quad 24$$

$$(3) \quad 32 \quad (4) \quad 34$$

۹۴- تعداد افزای‌های  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  که در آن ۳ و ۴ در یک کلاس هم‌ارزی باشند،

برابر است با:

$$(1) \quad 14 \quad (2) \quad 15$$

$$(3) \quad 16 \quad (4) \quad 17$$

۹۵- چند گراف دو بخشی با دو بخش  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  و  $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$

می‌توان تشکیل داد؟

$$(1) \quad 2^6 \quad (2) \quad 2^9$$

$$(3) \quad 3^3 \quad (4) \quad 3^8$$

۹۶- چه تعداد کلمه از حرف‌های کلمه  $abcdbdbefg$  می‌توان ساخت که هیچ دو  $b$

کنار هم نباشند؟

$$(1) \quad 3(7!) \quad (2) \quad 4(7!)$$

$$(3) \quad 5(7!) \quad (4) \quad 6(7!)$$

- ۹۷- یال‌های کدام یک از گراف‌های زیر را نمی‌توان به دورهای یال مجزا افزاز کرد؟
- (۱)  $K_{9,9}$  (۲)  $K_{10,10}$
- (۳)  $K_{10,20}$  (۴)  $K_{1,1}$
- ۹۸- فرض کنید  $A = \{0, 1, 2\}$  و  $B = \{1, 2, 3, \dots, 6, 7\}$  باشد، تعداد توابعی از  $A$  به  $B$  که در شرط زیر صدق می‌کنند، کدام است؟
- برای هر  $i$  و  $j$ ،  $i < j \Rightarrow f(i) < f(j)$
- (۱) ۳۳ (۲) ۳۵
- (۳) ۲۸ (۴) ۴۲
- ۹۹- فرض کنید  $G$  گرافی فاقد یال برشی باشد، کدام گزینه نادرست است؟
- (۱)  $G$  فاقد رأس برشی است.
- (۲) هر یال  $G$  روی یک دور قرار دارد.
- (۳) هر دو یال  $G$  در یک دور مشترک قرار دارد.
- (۴) هر رأس  $G$  درون یک دور قرار دارد.
- ۱۰۰- فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت گراف ساده و  $n$  رأسی  $G$  بوده و درایه‌ای غیر قطری از  $\sum_{i=0}^{n-1} A^i$  برابر صفر باشد، کدام یک از احکام زیر همواره درست است؟
- (۱)  $G$  ناهمبند است. (۲)  $G$  دو بخشی نیست.
- (۳)  $G$  درخت است. (۴)  $G$  دو بخشی است.
- ۱۰۱- فرض کنید  $G$  گرافی اویلری با ۱۳۹۳ یال باشد، کدام گزاره نادرست است؟
- (۱) هر یال  $G$  روی یک دور واقع است.
- (۲)  $G$  دو بخشی نیست.
- (۳)  $G$  حداقل ۱۳۹۳ زیر درخت فراگیر دارد.
- (۴) با حذف هر رأس  $G$ ، گراف حاصل همبند است.

۱۰۲- گراف  $G$  را چنین می‌سازیم که رئوس آن تمام دنباله‌های به طول ۷ از  $\circ$  و ۱ باشد و دو دنباله را به هم وصل می‌کنیم، هرگاه دقیقاً در یک جایگاه با هم اختلاف داشته باشند. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

(۱)  $G$  اویلری است. (۲)  $G$  همیلتنی است.

(۳) قطر گراف  $G$  برابر ۷ است. (۴)  $G$  گرافی مسطح است.

۱۰۳- چند زوج مرتب  $(A, B)$  وجود دارد که  $A, B \subseteq \{1, \dots, 10\}$  و داشته باشیم

$$A \cap B = \emptyset$$

(۱)  $6^{15}$  (۲)  $3^{10}$

(۳)  $6^{10}$  (۴)  $2 \times 3^{10}$

۱۰۴- گراف  $G$  را  $2$ -منظم گوییم هرگاه درجه هر رأس  $G$  برابر  $2$  باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر گراف  $3$ -منظم دارای دوری به طول فرد است.

(۲) هر گراف  $4$ -منظم دارای تطابق کامل است.

(۳) هر گراف  $3$ -منظم دارای تطابق کامل است.

(۴) هر گراف  $4$ -منظم همبند دارای دوری است که اگر تمام یال‌های آن را حذف کنیم، گراف حاصل همبند است.

۱۰۵- تعداد ماتریس‌های  $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$  را بیابید که  $x, y, z, w \in \{0, 1, \dots, 19\}$  و مقدار

دترمینان آن عددی زوج است؟

(۱)  $100,000$  (۲)  $10700$

(۳)  $80000$  (۴)  $10600$

۱۰۶- تعداد زیرگروه‌های ماکسیمال گروه خارج قسمتی  $\frac{\mathbb{Z}}{20\mathbb{Z} \cap 14\mathbb{Z}}$  برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۵

۱۰۷- فرض کنید  $G$  یک گروه باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر، نادرست است؟

(۱) اگر  $K \trianglelefteq G$  آنگاه:  $(\frac{G}{K})' = \frac{G'K}{K}$ .

(۲) اگر  $H, K \leq G$  آنگاه  $(H \cap K)' \leq H' \cap K'$ .

(۳) اگر  $H, K \leq G$  و  $G = HK$  آنگاه  $G' = H'K'$ .

(۴) اگر  $H, K \leq G$  و  $G = H \times K$  آنگاه  $G' = H' \times K'$ .

۱۰۸- فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $\mathbb{Q}$  میدان اعداد گویا باشد. در این صورت اگر

$\varphi: (\mathbb{Q}, +) \rightarrow G$  یک همریختی گروهی باشد، آنگاه:

(۱)  $\ker \varphi = \mathbb{Q}$

(۲)  $\ker \varphi = \mathbb{N}$

(۳)  $\ker \varphi = \mathbb{Z}$

(۴)  $\ker \varphi = \{0\}$

۱۰۹- ماکزیمم مرتبه ممکن برای یک عنصر  $S_{15}$  برابر است با:

(۱) ۱۵

(۲) ۱۰۸

(۳) ۶۰

(۴) ۱۰۵

۱۱۰- اگر  $\mathbb{N}$  مجموعه اعداد طبیعی باشد، آنگاه برای هر  $A, B \subseteq \mathbb{N}$  تعریف کنید:

$A * B = A \cap B$ . در این صورت کدام گزینه در مورد  $P(\mathbb{N})$ ، مجموعه تمام

زیر مجموعه‌های  $\mathbb{N}$  همراه با عمل  $*$  صحیح است؟

(۱)  $P(\mathbb{N})$  نیم گروهی است که تکواره نیست.

(۲)  $P(\mathbb{N})$  تکواره است که گروه نیست.

(۳)  $P(\mathbb{N})$  گروه است.

(۴)  $P(\mathbb{N})$  دارای عنصری است که خود توان نیست.

۱۱۱- کدام یک از مجموعه‌های زیر همراه با عمل دوتایی ارائه شده یک گروه نیست؟

$$(1) A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\} \text{ همراه با عمل دوتایی } a * b = \frac{ab}{3}.$$

$$(2) A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\} \text{ همراه با ضرب اعداد مختلط.}$$

$$(3) A = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| \leq 1\} \text{ همراه با ضرب اعداد مختلط.}$$

$$(4) A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \text{ همراه با ضرب اعداد مختلط.}$$

۱۱۲- فرض کنید  $A$  و  $B$  زیرگروه‌های نرمال از گروه متناهی  $G$  باشند به طوری که

$$(|A|, |B|) = 1. \text{ در این صورت برای هر } a \in A \text{ و هر } b \in B \text{ کدام گزینه}$$

صحیح است؟

$$(1) b^{-1}ab = a$$

$$(2) b^{-1}ab = a^{-1}$$

$$(3) a^{-1}ba = b^{-1}$$

$$(4) bab = a$$

۱۱۳- کدام گزینه در مورد گروه  $Z_4 \times S_3$  صحیح است؟

(1) این گروه حداقل ۳ زیرگروه ناآبلی دارد.

(2) این گروه دقیقاً ۳ زیرگروه آبلی دارد.

(3) تمام زیرگروه‌های آن نرمال است.

(4) تمام زیرگروه‌های نرمال آن آبلی است.

۱۱۴- فرض کنیم  $G$  یک گروه متناهی و  $H$  یک زیرگروه نرمال از  $G$  باشد به طوری که

$$|H| = 7, [G : H] = 20. \text{ فرض کنیم } x \in G \text{ از مرتبه } 7 \text{ باشد. در}$$

این صورت کدامیک از احکام زیر درست است؟

$$(1) x \in H \quad (2) x^7 \notin H$$

$$(3) xH \neq Hx^2 \quad (4) H \neq \langle x \rangle$$

۱۱۵- فرض کنید  $R$  یک حلقه بوده  $Z(R)$  مرکز آن باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر

نادرست است؟

(۱)  $Z(R)$  یک زیرحلقه  $R$  است.

(۲)  $Z(R)$  یک ایده‌آل  $R$  است.

(۳)  $(Z(R), +)$  یک زیرگروه نرمال  $(R, +)$  است.

(۴)  $(\frac{R}{Z(R)}, +)$  یک گروه آبلی است.

۱۱۶- تعداد عناصر یکال حلقه  $Z[i] = \{a + bi | a, b \in \mathbb{Z}\}$  برابر است با:

۱ (۱)

۲ (۲)

۶ (۳)

۴ (۴)

۱۱۷- کدام یک از مجموعه‌های زیر با اعمال بیان شده تشکیل یک حلقه می‌دهند؟

(۱)  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$  با جمع و ضرب ماتریس‌ها.

(۲) تمام توابع  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  همراه با عمل جمع و ضرب توابع.

(۳)  $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{Z} \text{ و } b \in \mathbb{Q} \right\}$  با جمع و ضرب ماتریس‌ها.

(۴) تمام توابع پیوسته از  $\mathbb{R}$  به  $\mathbb{R}$  همراه با عمل جمع و ترکیب توابع.

۱۱۸- تعداد عناصر پوچتوان  $\frac{\mathbb{Z}_{25}[x]}{3}$  برابر است با:

۲۷ (۱)

۶۲۵ (۲)

۸۱ (۳)

۱۲۵ (۴)

۱۱۹- اگر  $R$  و  $R'$  دو حلقه با مشخصه‌های غیر صفر بوده

(یعنی  $\text{Char}(R) \neq 0, \text{Char}(R') \neq 0$ ) و  $f: R \rightarrow R'$

یک همریختی حلقه‌ای باشد، آنگاه:

(۱)  $\text{Char}(f(R)) \geq \text{Char}(R)$

(۲)  $\text{Char}(f(R)) \leq \text{Char}(R)$

(۳)  $\text{Char}(f(R)) < \text{Char}(R)$

(۴)  $\text{Char}(f(R)) > \text{Char}(R)$

۱۲۰- کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱)  $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (1,2) \rangle} \cong \mathbb{Z}$

(۲)  $\frac{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}{\langle (1,2) \rangle} \cong \mathbb{Z}_4$

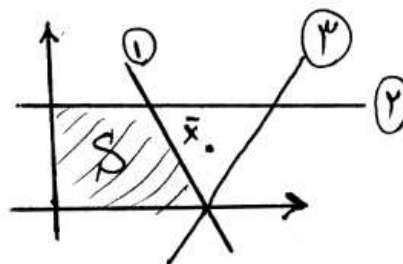
(۳)  $\frac{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8}{\langle (1,2) \rangle} \cong \mathbb{Z}_8$

(۴)  $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (1,1,1) \rangle} \cong \mathbb{Z}$

دروس تخصصی - بهینه‌سازی خطی

۱۲۱- فرض کنید مجموعه  $S = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  به صورت زیر است و

$s_i$  نشان دهنده متغیر کمکی قید  $i$ ام،  $i = 1, 2, 3$ ، است. در این صورت، مقدار



$s_1 s_2 s_3 \dots$

(۱) منفی است

(۲) صفر است

(۳) مثبت است

(۴) می‌تواند مثبت یا منفی باشد

۱۲۲- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

اگر در جواب بهینه، متغیرهای  $x_2$  و  $x_3$  غیر پایه‌ای باشند، آن‌گاه مقدار متغیرهای دوگان متناظر با جواب بهینه برابر است با ...

$$(1) \quad y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 0 \quad (2) \quad y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = 0, y_3 = 0$$

$$(3) \quad y_1 = 0, y_2 = 3, y_3 = 0 \quad (4) \quad y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = 0$$

۱۲۳- فرض کنید  $B$  یک ماتریس پایه با رتبه  $m$  از ماتریس رتبه سطری کامل  $A_{m \times n}$

است. اگر  $r$  امین ستون ماتریس  $B$  با  $k$  امین ستون ماتریس  $A$  جایگزین شود، آن‌گاه ماتریس مربعی جدید یک پایه است اگر و تنها اگر ...

$$(1) \quad a_{kr} \neq 0 \quad (2) \quad a_{rk} \neq 0$$

$$(3) \quad (B^{-1}a_r)_k \neq 0 \quad (4) \quad (B^{-1}a_k)_r \neq 0$$

۱۲۴- اگر  $A, m \times n$  و  $m < n$  رتبه  $(A)$ ، آن‌گاه برای مسأله‌ی

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \end{aligned}$$

گزینه درست را انتخاب کنید.

(۱) یا ناشدنی است یا نامتناهی.

(۲) یا جواب بهینه دارد یا نامتناهی است.

(۳) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

(۴) بی‌نهایت جواب بهینه دارد.



۱۲۵- فرض کنید  $x_0$  یک جواب پایه‌ای شدنی برای دستگاه  $Ax = b$ ،  $x \geq 0$ ، است. برای مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر گزینه‌ی درست را انتخاب کنید.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = c^T x \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(۱) مسأله بی‌کران است، هرگاه  $c \leq 0$ .

(۲) به ازای هر بردار نامنفی  $c \in R$ ، نقطه  $x_0$  یک جواب بهینه یکتای مسأله است.

(۳) بردار  $c \in R^n$  وجود دارد به طوری که  $x_0$  جواب بهینه یکتای مسأله است.

(۴) به ازای هر بردار نامنفی  $c \in R^n$ ، نقطه  $x_0$  یک جواب بهینه یکتای مسأله است.

۱۲۶- فرض کنید  $A$  یک ماتریس متقارن است. مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq c \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

اگر  $\bar{x} \geq 0$  یک جواب برای دستگاه  $A\bar{x} = c$  باشد، آن‌گاه ...

(۱)  $\bar{x}$  یک جواب بهینه است

(۲)  $\bar{x}$  یک نقطه درون ناحیه شدنی است

(۳)  $\bar{x}$  یک نقطه گوشه‌ای ناحیه شدنی است

(۴)  $\bar{x}$  یک جواب پایه‌ای تباهیده است

۱۲۷- مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & x \in S = \{x \mid Ax \leq b\} \end{aligned}$$

فرض کنید  $S$  شامل یک خط است. در این صورت، مسأله جواب بهینه ...

(۱) ندارد (۲) رأسی ندارد

(۳) چندگانه دارد (۴) یکتا دارد

۱۲۸- جدول اولیه یک مسأله تخصیص (واگذاری) به صورت زیر است.

فرض کنید کار ۱ را نمی‌توان به فرد A تخصیص داد. هزینه بهینه این تخصیص کدام است؟

فرد \ کار	A	B	C	D
۱	۱	۸	۱۲	۴
۲	۷	۹	۱۸	۳
۳	۱۲	۷	۵	۱۰
۴	۱۰	۳	۹	۴

۱۸ (۱)

۱۹ (۲)

۲۰ (۳)

۲۱ (۴)

۱۲۹- فرض کنید  $z - c_j$  ضریب هزینه کاهش یافته متناظر با متغیر  $x_j$  است. در این

صورت، شرط  $z - c_j < 0$ ، به ازای هر  $x_j$  غیر پایه‌ای، برای یکتا بودن جواب بهینه ...

(۱) کافی است ولی لازم نیست

(۲) لازم است ولی کافی نیست

(۳) لازم و کافی است

(۴) نه لازم است نه کافی

۱۳۰- فرض کنید یک مسأله برنامه‌ریزی خطی استاندارد (P) دارای جواب بهینه است و

ضریب یک متغیر غیر پایه‌ای در جواب بهینه تغییر داده شود. مسأله‌ی جدید را  $(P')$  و دوگان آن را (D) بنامید. در این صورت، ...

(۱) (D) شدنی است

(۲)  $(P')$  جواب بهینه دارد

(۳) (D) می‌تواند نامتناهی باشد

(۴)  $(P')$  می‌تواند نامتناهی باشد

۱۳۱- مسأله‌ی (P) را به صورت

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{Ax} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{p})$$

در نظر بگیرید. فرض کنید  $\bar{x}$  برای (P) شدنی است و به ازای هر  $i$ ، داریم:

$$\mathbf{c}_i \geq 0 \quad \text{یا} \quad \bar{x}_i = 0. \quad \text{مقدار بهینه‌ی } z \dots$$

$$(1) \quad \text{برابر است با صفر} \quad (2) \quad \sum_i \mathbf{c}_i \mathbf{u}_i \quad \text{برابر است با}$$

$$(3) \quad \text{برابر است با} \quad \sum_i \mathbf{c}_i \bar{x}_i \quad (4) \quad \text{کم‌تر از} \quad \sum_{i: \mathbf{c}_i \geq 0} \mathbf{c}_i \bar{x}_i \quad \text{نیست}$$

۱۳۲- فرض کنید یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (P) نامتناهی است. قید جدیدی را به

صورت  $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}_{m+1}$  به (P) اضافه کنید و مسأله‌ی جدید را (P') بنامید.

مسأله‌ی (P') ...

(1) نامتناهی است، اگر شدنی باشد

(2) جواب بهینه دارد، اگر شدنی باشد

(3) یا نامتناهی است یا ناشدنی

(4) می‌تواند یا نامتناهی، یا جواب بهینه داشته، یا ناشدنی باشد

۱۳۳- فرض کنید  $\mathbf{u}$  وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{u} &= \mathbf{c} \\ \mathbf{u} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

گزینه‌ی درست را انتخاب کنید؟

$$(1) \quad \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

(2) دستگاه  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} > \mathbf{0}$ ،  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{0}$ ، جواب دارد.

$$(3) \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{0}$$

(4) دستگاه  $\mathbf{c}^T \mathbf{x} < \mathbf{0}$ ،  $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}$ ، جواب دارد.

۱۳۴- فرض کنید در یکی از گره‌های الگوریتم شمارشی بالاش یا الگوریتم شاخه و کران برای حل یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی استاندارد با هدف  $\min c^T x$  و متغیرهای  $x_1, \dots, x_n$  یا صحیح، به یک جواب شدنی مانند  $\bar{x}$  رسیده‌ایم. در این صورت، ...

(۱)  $c^T \bar{x}$  یک کران بالا برای مقدار بهینه است

(۲)  $c^T \bar{x}$  یک کران پایین برای مقدار بهینه است

(۳)  $\bar{x}$  یک جواب بهینه است

(۴)  $\bar{x}$  جواب بهینه یکتاست

۱۳۵- برنامه‌ریزی حمل و نقل با جدول هزینه‌های زیر را در نظر بگیرید. مقدار هزینه کل برای  $\theta$  به نحوی که  $30 < \theta < 40$ ، کدام است؟

مقصد \ مبدأ	۱	۲	عرضه
۱	۵	۱	$20 + \theta$
۲	۸	۵	$80 - \theta$
تقاضا	۵۰	۵۰	

(۱)  $570 - \theta$

(۲)  $540 - 3\theta$

(۳)  $570 - 4\theta$

(۴)  $540 - 5\theta$