



نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :



اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.
امام خمینی (ره)

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

**آزمون ورودی
دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل
سال ۱۳۹۳**

**مجموعه ریاضی
جبر - آنالیز - هندسه (کد ۲۲۳۳)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

| ردیف | مواد امتحانی | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|---|------------|----------|----------|
| ۱ | مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱- جبر خطی - جبر ۱- جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی ۱) | ۴۵ | ۱ | ۴۵ |

اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

- ۱- در فضای متریک (X, d) کدام گزینه صحیح است؟ (E°) نشان دهنده مجموعه نقاط درونی E و E' نشان دهنده مجموعه نقاط حدی E است.
 (۱) اگر $E^\circ = \emptyset$ آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.
 (۲) اگر E حداکثر شمارا باشد آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.
 (۳) اگر $E' = \emptyset$ آنگاه $X \setminus E$ در X چگال است.
 (۴) هیچ کدام
- ۲- اگر از هر بازه $\frac{1}{3}$ میانی که در حین ساختن مجموعه کانتور حذف می‌شود، یک عضو انتخاب و مجموعه A را بسازیم، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟ (A°) درون A و \bar{A} بستار A است.
 (۱) $A^\circ = \emptyset$ و \bar{A} شمارا است. (۲) $A^\circ \neq \emptyset$ و \bar{A} ناشمارا است.
 (۳) $A^\circ = \emptyset$ و \bar{A} ناشمارا است. (۴) $A^\circ \neq \emptyset$ و \bar{A} شمارا است.
- ۳- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! e)$ کدام است؟
 (۱) π (۲) 2π
 (۳) 2π (۴) موجود نیست.
- ۴- سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)(\sin(na))}{n}$ به ازای چه مقادیر a همگراست؟
 (۱) فقط برای $a \geq 0$
 (۲) به ازای تمام مقادیر $a \in \mathbb{R}$
 (۳) فقط برای $a < 0$
 (۴) به ازای هیچ مقدار $a \in \mathbb{R}$
- ۵- کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) اگر (X, d) یک فضای متریک باشد که در آن هر مجموعه باز همبند است آنگاه X تک عضوی است.
 (۲) اگر (X, d) یک فضای متریک با خاصیت هایپنه - بورل باشد آنگاه X یک فضای متریک کامل است.
 (۳) اگر (X, d) یک فضای متریک همبند با بیش از دو عضو باشد، آنگاه X ناشمارا است.
 (۴) اگر (X, d) یک فضای متریک فشرده باشد مجموعه نقاط تنهای آن متناهی است.
- ۶- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه $f(x) = \inf \{ |x - me| : m \in \mathbb{Z} \}$ در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد دنباله $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ صحیح است؟
 (۱) همگراست.
 (۲) مجموعه‌ی حدهای زیر دنباله‌ای آن بازه‌ی $[\frac{e}{\pi}, \frac{e}{\pi}]$ است.
 (۳) زیر دنباله‌ی همگرا ندارد.
 (۴) مجموعه حدهای زیر دنباله‌ای آن حداکثر شمارا است.

- ۷- کدام گزینه نادرست است؟
- (۱) اگر $f: [a, b] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و f' تغییر علامت ندهد آنگاه f لزوماً یکنوا نیست.
- (۲) اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و x_0 نقطه درونی A و $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ موجود باشد، آنگاه f' در x_0 پیوسته است.
- (۳) اگر $A \subseteq \mathbb{R}$ و x_0 نقطه درونی A باشد و تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه x_0 مشتق چپ و راست داشته باشد، آنگاه f در x_0 پیوسته است.
- (۴) اگر $f: [a, b] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد که مشتق آن متحد با صفر است، آنگاه f تابعی ثابت است.

- ۸- ماتریس‌های $A, B \in M_p(\mathbb{R})$ موجودند که $A^2 = B^2 = I$ در این صورت مقادیر ویژه AB کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

$$(1) 1 \pm \sqrt{3}$$

$$(2) 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$(3) \frac{1}{2}, 2$$

$$(4) 2 \pm 2\sqrt{3}$$

- ۹- فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تبدیلی خطی باشد که $T(a, b, c) = (0, a, b)$ در این صورت اگر $f_i(x)$ چند جمله‌ای ویژه T^i باشد مقدار $f_1 + f_2 - 2f_3$ کدام است؟

$$(1) -1$$

$$(2) 0$$

$$(3) 1$$

$$(4) 2$$

- ۱۰- اگر S ماتریسی باشد که $S^T = -S$ و عدد مختلط $\lambda = a + bi$ مقدار ویژه S باشد، کدام گزینه صحیح است؟

$$(1) a = 0$$

$$(2) b = 0$$

$$(3) b\lambda$$
 مقدار ویژه S است.

$$(4) a\lambda$$
 مقدار ویژه S است.

۱۱- فرض کنید V یک فضای برداری ۵ بعدی روی میدان F و W زیر فضایی ۲ بعدی از V باشد. اگر $T = \{T: V \rightarrow V \mid W \text{ صفر است}\}$ آن گاه بعد S به عنوان زیر فضایی از $L(V, V)$ برابر است با:

۲۱ (۱)

۷ (۲)

۱۰ (۳)

۱۵ (۴)

۱۲- معادله $X^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ در $M_2(\mathbb{R})$ دارای چند جواب است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۱۰ (۳)

بی نهایت (۴)

۱۳- فرض کنید $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$ و $ABA=A$ در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

 $0 \leq \text{tr}(AB) \leq 10$ (۱) $\text{tr}(AB) = 0$ (۲) $5 \leq \text{tr}(AB) \leq 15$ (۳) $\text{tr}(AB) \geq 10$ (۴)

۱۴- فرض کنید $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ و معادله $AX - XB = C$ را با ماتریس مجهول $X \in M_n(\mathbb{R})$ در نظر بگیرید. کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) اگر ماتریس غیر صفر Y وجود داشته باشد که $AY = YB$ آنگاه ماتریس C وجود دارد بطوریکه معادله مزبور حداکثر دارای n جواب است.

(۲) اگر ماتریس غیر صفر Y وجود داشته باشد که $AY = YB$ آنگاه ماتریس C وجود دارد بطوریکه معادله مزبور دارای جواب نیست.

(۳) اگر ماتریس غیر صفر Y وجود داشته باشد که $AY = YB$ آنگاه ماتریس C وجود دارد بطوریکه معادله مزبور حداکثر دارای بی نهایت جواب است.

(۴) اگر هیچ ماتریس غیر صفر Y وجود داشته باشد که $AY = YB$ آنگاه معادله مورد نظر برای هر $C \in M_n(\mathbb{R})$ دارای جواب منحصر بفرد است.

۱۵- فرض کنید $H = \langle (1234), (56) \rangle$ زیر گروهی از S_4 باشد. در این صورت H با کدام یک از گروه‌های زیر یکرخت است؟

$$(1) \mathbb{Z}_8 \quad (2) \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$$

۱۶- گروه D_4 ، گروه دو وجهی ۸ عضوی Q_8 ، گروه کواترنیونهای ۸ عضوی گروه G را بدون تاب می‌گوییم. هرگاه مرتبه‌ی هر عضو نابدیهی آن نامتناهی باشد. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) هر زیر گروه یک گروه بدون تاب، بدون تاب است.
 (۲) تصویر همریخت هر گروه بدون تاب، بدون تاب است.
 (۳) ضرب مستقیم هر خانواده از گروه‌های بدون تاب، بدون تاب است.
 (۴) هر گروه آبدی بدون تاب و با تولید متناهی با حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی \mathbb{Z} یکرخت است.

۱۷- تعداد زیر گروه‌های $A_4 \times \mathbb{Z}_5$ (گروه متناوب) که دارای شاخص ۳ است برابر است با:

$$(1) 1 \quad (2) 2 \\ (3) 3 \quad (4) 4$$

۱۸- فرض کنید G یک گروه بوده و $N < G$ و $[G : N] = 4$ باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $G' \leq N$
 (۲) G دارای زیر گروه نرمالی از اندیس ۲ است.
 (۳) زیر گروه سره H از G موجود است که $HN = G$.
 (۴) اگر $\frac{G}{N}$ دوری نباشد، سه زیر گروه نرمال A, B, C وجود دارند که $G = A \cup B \cup C$.

۱۹- فرض کنید M_1, M_2 دو ایده‌آل ماکسیمال متمایز حلقه جابجایی و یکدار R باشند در این صورت کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) $\frac{R}{M_1 \cap M_2}$ با ضرب دکارتی دو میدان یکرخت است.
 (۲) $M_1 \cap M_2 = M_1 M_2$
 (۳) $\frac{M_1}{M_1 M_2}$ یک میدان است.
 (۴) $\frac{M_2}{M_1 \cap M_2}$ حلقه‌ای غیریکدار است.

۲۰- فرض کنید M یک ایده‌آل ماکسیمال حلقه جابجایی و یکدار R باشد. در مورد

حلقه $S = \frac{R}{M^n}$ که در آن $n \geq 2$ ، کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) S دارای دقیقاً n ایده‌آل است.
 (۲) هر ایده‌آل اول حلقه S ، ماکسیمال است.
 (۳) S دارای تنها یک ایده‌آل ماکسیمال است.
 (۴) S دارای تنها یک ایده‌آل اول است.

- ۲۱- تعداد چند جمله‌ایهای تحویل ناپذیر از درجه ۲ در $\mathbb{Z}_{11}[x]$ برابر است با:
- (۱) ۵۵۰ (۲) ۵۰۰
(۳) ۴۰۰ (۴) ۶۰۰
- ۲۲- فرض کنید $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فضای اندازه (X, M, μ) باشد که برای هر n ، $\mu(E_n) > \frac{1}{100}$.
- برای مجموعه $F = \{x \in X : \text{تعداد نامتناهی } E_n \text{ تعلق دارد}\}$ کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) F لزوماً اندازه‌پذیر نیست.
(۲) F اندازه‌پذیر است و $\mu(F) = \infty$.
(۳) F اندازه‌پذیر است و اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه $\mu(F) \geq \frac{1}{100}$.
(۴) F اندازه‌پذیر است و اگر $\mu(X) < \infty$ آنگاه $\mu(F) = 0$.
- ۲۳- فرض کنید (X, M, μ) فضای اندازه و μ^* اندازه خارجی متناظر با μ باشد.
- اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای نزولی از زیر مجموعه‌های X باشد که $\mu^*(A_1) < \infty$ ، کدام گزینه صحیح است؟
- (۱) ممکن است $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) > \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.
(۲) همواره $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) \leq \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.
(۳) همواره $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) = \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.
(۴) ممکن است $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(A_n) < \mu^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.
- ۲۴- فرض کنید m اندازه لبگ بر \mathbb{R} و A زیر مجموعه‌ای لبگ اندازه‌پذیر از \mathbb{R} با اندازه‌متناهی ناصفر باشد. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = m((-\infty, x] \cap A)$ تعریف می‌کنیم.
- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
- (۱) تابع f در هر نقطه A ناپیوسته است.
(۲) تابع f روی \mathbb{R} انتگرال‌پذیر لبگ است.
(۳) تابع f پیوسته است.
(۴) تابع f در هر نقطه $\mathbb{R} \setminus A$ ناپیوسته است.

- ۲۵- کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟
 (۱) هر زیر مجموعه هیچ جا چگال \mathbb{R} از اندازه لبگ صفر است.
 (۲) هر زیر مجموعه \mathbb{R} با اندازه لبگ صفر، هیچ جا چگال است.
 (۳) هیچ زیر مجموعه هیچ جا چگال از \mathbb{R} با اندازه لبگ اکیداً مثبت وجود ندارد.
 (۴) هر زیر مجموعه بسته \mathbb{R} با اندازه لبگ صفر، هیچ جا چگال است.
- ۲۶- کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر یک زیر مجموعه اندازه‌پذیر \mathbb{R} اندازه‌پذیر است.
 (۲) یک تابع با تغییر کراندار روی بازه $[a, b]$ لزوماً اندازه‌پذیر لبگ نیست.
 (۳) هر تابع یک به یک، پوشا و پیوسته از \mathbb{R} به \mathbb{R} مجموعه‌های بورل را به مجموعه‌های بورل می‌برد.
 (۴) هر تابع انتگرال‌پذیر ریمان روی $[a, b]$ اندازه‌پذیر لبگ است.
- ۲۷- فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ پیوسته، یک به یک و پوشا و m اندازه لبگ بر $[a, b]$ باشد. کدام گزینه صحیح است؟
 (۱) تابع f زیر مجموعه‌های پوچ $[a, b]$ را به مجموعه‌های پوچ می‌نگارد.
 (۲) اگر E پوچ باشد و $f(E)$ اندازه‌پذیر باشد آنگاه $f(E)$ نیز پوچ است.
 (۳) اگر E پوچ باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای پوچ بودن $f(E)$ آنست که $f(E)$ اندازه‌پذیر باشد.
 (۴) شرط لازم و کافی برای آنکه f زیر مجموعه‌های پوچ $[a, b]$ را به مجموعه‌های پوچ بنگارد آنست که به ازای هر مجموعه اندازه‌پذیر $A \subseteq [a, b]$ مجموعه $f(A)$ اندازه‌پذیر باشد.
- ۲۸- مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} را با اندازه لبگ در نظر بگیرید. در مورد دنباله توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ روی \mathbb{R} با ضابطه $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}(x)$ کدام گزینه نادرست است؟
 (۱) $f_n \rightarrow 0$ به طور یکنواخت روی \mathbb{R}
 (۲) $f_n \rightarrow 0$ در اندازه
 (۳) $f_n \rightarrow 0$ در $L^1(\mathbb{R})$
 (۴) $f_n \rightarrow 0$ تقریباً همه جا روی \mathbb{R}
- ۲۹- فرض کنید (X, M, μ) یک فضای با اندازه متناهی و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر از X به \mathbb{R} باشد. برای هر $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم $E_n = \{x \in X \mid f_n(x) \neq 0\}$. کدام گزینه نتیجه می‌دهد دنباله $\{f_n\}$ در اندازه به صفر همگرا است؟
 (۱) به ازای هر m و n متمایز $E_n \cap E_m = \emptyset$
 (۲) به ازای هر n ، $E_{n+1} \subseteq E_n$
 (۳) به ازای هر n ، $E_n \subseteq E_{n+1}$
 (۴) به ازای هر n ، $E_n \cap E_{n+1} \neq \emptyset$

۳۰- فرض کنید X یک فضای با اندازه متناهی باشد، $1 \leq p < \infty$ و دنباله $\{f_n\}$ در $L^p(X)$ به f همگرا باشد. اگر عدد حقیقی K موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x \in X$ ، $|f_n(x)| \leq K$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟
(۱) $f_n \rightarrow f$ در $L^\infty(X)$.

(۲) فقط برای $r \geq p$ داریم $f_n \rightarrow f$ در $L^r(X)$.

(۳) فقط برای $1 \leq r \leq p$ داریم $f_n \rightarrow f$ در $L^r(X)$.

(۴) به ازای هر $1 \leq r < \infty$ داریم $f_n \rightarrow f$ در $L^r(X)$.

۳۱- فرض کنید $C^k[0, 1]$ فضای توابع $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ باشد که مشتقات f تا مرتبه k موجود و پیوسته هستند و این فضا با نرم یکنواخت $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ مجهز شده باشد.

نگاشت $D: C^n[0, 1] \rightarrow C^{n-1}[0, 1]$ را برای $1 \leq n$ با ضابطه $Df = f'$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نگاشت D خطی و کراندار است.

(۲) نمودار (گراف) D بسته نیست.

(۳) نگاشت D خطی و پوشا است.

(۴) نگاشت D گوی یکیه باز فضای $C^n[0, 1]$ را به گوی یکیه باز فضای $C^{n-1}[0, 1]$ می‌نگارد.

۳۲- فرض کنید X یک فضای برداری نرم‌دار و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ تابع خطی غیر صفر باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر f ناپیوسته باشد ممکن است هسته f در X چگال نباشد.

(۲) اگر f ناپیوسته باشد آنگاه برای هر $a \in X$ و هر $0 < r$ ، $f(B(a, r)) = \mathbb{R}$ که در آن $B(a, r)$ گوی باز به مرکز a و شعاع r است.

(۳) اگر هسته f در X چگال باشد آنگاه f ممکن است پیوسته باشد.

(۴) اگر f کراندار باشد هسته f نیز در X کراندار است.

۳۳- فرض کنید (X, M, μ) یک فضای اندازه باشد، $1 \leq p, q < \infty$ و

$f \in L^p(x, \mu)$ کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر $q < p$ آنگاه $f^{-1} \in L^q(X)$.

(۲) اگر $f^{-1} \in L^q(X)$ آنگاه $\mu(X) < \infty$.

(۳) اگر $p < q$ آنگاه $f^{-1} \in L^q(X)$.

(۴) $f^{-1} \in L^\infty(X)$.

تذکر: در تمام سوالات R حلقه‌ای یکدار و R-مدول‌ها یکانی هستند.

۳۴- اگر M یک R-مدول به طور متناهی تولید شده باشد، آنگاه M دارای کدام خاصیت است؟

(۱) مجموع مستقیم زیر مدول‌های نابدیهی است.

(۲) مجموع مستقیم تعداد متناهی زیر مدول‌های دوری است.

(۳) مجموع تعداد متناهی زیر مدول‌های دوری است.

(۴) به ازای n ای با R^n یکرخت است.

۳۵- فرض کنید R یک حلقه یکدار و $U(R)$ گروه شامل تمام عناصر وارون‌پذیر R باشد. اگر $J(R)$ رادیکال جیکوبسن حلقه R باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) حلقه تولید شده توسط $U(R)$ ، R است.

(۲) اگر R نامتناهی باشد، $U(R)$ نیز نامتناهی است.

(۳) $U\left(\frac{R}{J(R)}\right) = \{a + J(R) \mid a \in U(R)\}$

(۴) $U(R[x])$ ، برابر با مجموعه تمام چند جمله‌ای‌های با ضرایب در $U(R)$ است.

۳۶- فرض کنید برای هر عدد صحیح a از نماد \bar{a} برای نمایش a به هنگام ۲ استفاده کنیم. کدام یک از رشته‌های زیر دقیق کوتاه نمی‌باشد؟

$$\circ \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \circ \quad (۱)$$

$$f(1) = (2, 0), g(a, b) = (\bar{b}, \bar{a})$$

$$\circ \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \circ \quad (۲)$$

$$f(x) = 2x, g(a) = \bar{a}$$

$$\circ \rightarrow \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \circ \quad (۳)$$

$$f(1) = (2, 0), g(a, b) = (\bar{a}, \bar{b})$$

$$\circ \rightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_4 \rightarrow \circ \quad (۴)$$

$$f(a \otimes b) = 2a \otimes 2b, g(a \otimes b) = 2b \otimes 2a$$

۳۷- فرض کنید G گروهی آزاد و با تولید متناهی است. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

(۱) هر زیر گروه نرمال G نیز با تولید متناهی است.

(۲) هر زیر گروه با اندیس متناهی G نیز با تولید متناهی است.

(۳) G با حاصلضرب مستقیم تعدادی متناهی Z یکرخت است.

(۴) G شامل زیر گروهی نابدیهی و متناهی است.

۳۸- فرض کنید M_1, M_2, M_3 سه R -مدول ساده و دو بدو غیر یکرخت باشند. اگر $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ ، در این صورت کدام گزینه در مورد حلقه $\text{Hom}_R(M, M)$ صحیح است؟

(۱) صفر است.

(۲) مجموع مستقیم سه حلقه تقسیم است.

(۳) مجموع مستقیم شش حلقه تقسیم است.

(۴) مجموع مستقیم نه حلقه تقسیم است.

۳۹- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار بوده و M یک R -مدول با تولید متناهی باشد. کدام گزینه صحیح نمی‌باشد؟

(۱) M نوتری است.

(۲) M دارای زیر مدول ماکسیمال است.

(۳) اگر R آر تینی باشد آنگاه M آر تینی است.

(۴) اگر $f: M \rightarrow M$ یک R -مدول هم‌ریختی پوشا باشد، آنگاه f یک R -مدول یکرختی است.

۴۰- فرض کنید G گروهی آبلی و متناهی و p عددی اول و k بزرگترین عددی باشد که $|G| \mid p^k$ ، در این صورت $\mathbb{Z}_p^k \otimes_{\mathbb{Z}} G$ به عنوان \mathbb{Z} -مدول با کدام یک از مدول‌های زیر یکرخت است؟

(۱) \mathbb{Z}

(۲) G

(۳) p -زیر گروه سیلوی G

(۴) حاصلضرب دکارتی تمام q -زیر گروه‌های سیلوکه $q \neq p$

۴۱- اگر R یک حلقه یک‌دار و M یک R -مدول بوده و I ایده‌آلی از R باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر I پوچتوان باشد و $IM = M$ آنگاه $M = 0$.

(۲) اگر M یک R -مدول با تولید متناهی بوده و $IM = M$ آنگاه $M = 0$.

(۳) اگر $I \subseteq J(R)$ و $IM = M$ آنگاه $M = 0$.

(۴) اگر M یک R -مدول با تولید متناهی بوده و $I \subseteq J(R)$ و $IM = 0$ ، آنگاه $M = 0$.

- ۴۲- اگر M یک \mathbb{Z} -مدول آزاد باشد در این صورت کدام حکم در مورد $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, Q)$ به عنوان یک \mathbb{Z} -مدول صحیح است؟
- (۱) انژکتیو است ولی لزوماً پروژکتیو نیست.
 - (۲) پروژکتیو است ولی لزوماً انژکتیو نیست.
 - (۳) پروژکتیو و انژکتیو است.
 - (۴) پروژکتیو و انژکتیو نیست.
- ۴۳- فرض کنید M یک R -مدول ساده باشد و $N = M \oplus M$. در این صورت کدام گزینه درست است؟
- (۱) N تعداد متناهی زیر مدول دارد.
 - (۲) $\text{Hom}_R(N, N)$ حلقه تقسیم است.
 - (۳) $\text{Hom}_R(N, N)$ با حاصلضرب چهار حلقه تقسیم یکرخت است.
 - (۴) $J(R)N = \{0\}$.
- ۴۴- حلقه $(\Delta\mathbb{Z}_{20}, \text{End}_{\mathbb{Z}_{20}}(\Delta\mathbb{Z}_{20}))$ با کدام یک از حلقه‌های زیر یکرخت است؟
- (۱) \mathbb{Z}_4
 - (۲) \mathbb{Z}_5
 - (۳) $M_4(\mathbb{Z}_5)$
 - (۴) $M_5(\mathbb{Z}_4)$
- ۴۵- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و M یک R -مدول به‌طور متناهی تولید شده و A یک R -مدول آر‌تینی باشد. کدام گزاره درست است؟
- (۱) $\text{Hom}_R(A, A)$ حلقه‌ای متناهی است.
 - (۲) $\text{Hom}_R(M, M)$ با $M_n(R)$ یکرخت است که n تعداد مولدهای M است.
 - (۳) $\text{Hom}_R(A, M)$ حلقه‌ای نوتری است.
 - (۴) $\text{Hom}_R(M, A)$ یک R -مدول آر‌تینی است.