



315

D

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

<p>صبح جمعه ۹۳/۱۲/۱۵ دفترچه شماره ۱ از ۲</p>	 <p>جمهوری اسلامی ایران وزارت علوم، تحقیقات و فناوری سازمان سنجش آموزش کشور</p>	<p>اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود. امام خمینی (ره)</p>		
<p><b>آزمون ورودی</b> <b>دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۴</b></p>				
<p><b>ریاضی محض</b> <b>(کد ۲۲۳۳)</b></p>				
<p>مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه</p>		<p>تعداد سؤال: ۴۵</p>		
<p>عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات</p>				
ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - جبر خطی - جبر ۱ - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵
<p>این آزمون نمره منفی دارد. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.</p>				
<p>اسفند ماه - سال ۱۳۹۳</p>				
<p>حق چاپ، تکثیر و انتشار سوالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.</p>				

۱- در مورد سری  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$  کدام گزینه درست است؟

- (۱) سری همگرای مطلق است.  
 (۲) سری همگرای مشروط است.  
 (۳) مجموع جزئی سری کران دار است ولی واگراست.  
 (۴) مجموع جزئی سری بی کران است.

۲- به ازای  $a > 0$  مقدار  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a^n} + \frac{2}{a^n} + \dots + \frac{n}{a^n} \right)$  برابر است با:

- (۱)  $\frac{1}{\ln a}$   
 (۲)  $\frac{a-1}{\ln a}$   
 (۳)  $\frac{a}{\ln a}$   
 (۴)  $\frac{a+1}{\ln a}$

۳- فرض کنید  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  فشرده و  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع باشد که برای هر  $t \in \mathbb{R}$ ، مجموعه  $f^{-1}(t, \infty)$  بسته است. کدام گزینه درست است؟

- (۱)  $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$  وجود دارد به طوری که  
 (۲) ممکن است تابع  $f$  سوپرمم و اینفیمم خود را بر  $X$  نگیرد.  
 (۳)  $f(y_0) = \inf_{x \in X} f(x) > -\infty$  وجود دارد به طوری که  
 (۴)  $f$  کران دار است.

۴- اگر  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  در نقطه  $x = a$  مشتق پذیر باشند و  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$  تعریف شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $f(a) = g(a)$  آنگاه  $h$  در  $a$  مشتق پذیر است.

(۲) اگر  $h$  در  $a$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f(a) \neq g(a)$

(۳) اگر  $f(a) \neq g(a)$  آنگاه  $h$  در  $a$  مشتق پذیر است.

(۴) اگر  $h$  در  $a$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $g'(a) = f'(a)$

۵- فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  پیوسته و انتگرال ریمان ناسره  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  همگرا باشد. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx$$

(۱) صفر

(۲)  $+\infty$

(۳) ۱

(۴) موجود نیست.

۶- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $f: X \rightarrow X$  تابعی پیوسته باشد به طوری که به ازای هر دو عضو متمایز  $x$  و  $y$  در  $X$ ،  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$  کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $X$  فشرده باشد آنگاه  $f$  نقطه ثابت دارد.

(۲) ممکن است  $f$  نقطه ثابت نداشته باشد.

(۳) اگر  $x_0 \in X$  وجود داشته باشد که  $\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$  نقطه حدی داشته باشد، آنگاه  $f$  نقطه ثابت دارد  
( $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ )

(۴) اگر  $X$  فشرده باشد، آنگاه ثابت  $0 < \alpha < 1$  وجود دارد که به ازای هر دو نقطه  $x$  و  $y$  در  $X$  داریم  
 $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

۷- نقیض گزاره زیر کدام است؟

دنباله توابع حقیقی  $\{f_n\}$  بر مجموعه  $X$  به طور یکنواخت به تابع  $f$  میل می کند. ( $0 < \varepsilon$  و  $n, N \in \mathbb{N}$  فرض شده اند).

$$(1) \forall \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(2) \exists \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(3) \exists \varepsilon \forall N \forall n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(4) \exists \varepsilon \exists N \exists n \forall x (x \in X \& n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

۸- فرض کنید تابع  $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{n}, (m,n)=1, (p,n)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 1 \quad (1)$$

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 1 \quad (4)$$

۹- فرض کنید دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر بازه  $[a,b]$  باشد و دنباله توابع  $\{F_n\}$  بر  $[a,b]$  با

$$\text{ضابطه } F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \text{ تعریف شود. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟}$$

(۱) اگر دنباله  $\{f_n\}$  یکنواخت همگرا به صفر باشد آنگاه  $\{F_n\}$  هم یکنواخت همگرا به صفر است

(۲) اگر دنباله  $\{f_n\}$  یکنواخت کران‌دار باشد آنگاه  $\{F_n\}$  یک زیر دنباله یکنواخت همگرا دارد.

(۳) اگر  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع پیوسته و یکنواخت همگرا باشد، آنگاه دنباله  $\{F_n\}$  یکنواخت همگرا به تابعی است که لزوماً به طور پیوسته مشتق‌پذیر نیست.

(۴) اگر  $\{f_n\}$  دنباله‌ای نزولی از توابع پیوسته و نقطه‌وار همگرا به صفر باشد، آنگاه دنباله  $\{F_n\}$  یکنواخت همگرا به صفر است.

۱۰- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  وارون‌پذیر با درایه‌های واقع در میدان  $F$  باشد. اگر  $\det(A) = 1$  و  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^{-1}) = 0$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $A^5 = I$

(۲)  $A^2 = I$

(۳)  $A^3 = I$

(۴)  $A^4 = I$

۱۱- اگر  $A$  ماتریسی  $3 \times 3$  باشد و مقادیر ویژه آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند به فرض اینکه  $\text{tr}(A) = 9$  و  $\det(A) = -21$ ، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از:

(۱) ۴

(۲) ۷

(۳) ۸

(۴) ۹

۱۲- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $4 \times 4$  با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که  $A^2 + 2A + 3I = 0$ ، در این صورت  $\text{tr}(A^{-1})$  برابر است با:

(۱)  $\frac{2}{3}$

(۲)  $-\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{4}{3}$

(۴)  $-\frac{4}{3}$

۱۳- فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_{20} \in M_{10}(\mathbb{R})$  ماتریس‌های ناصفر بوده و  $A_1 A_2 \dots A_{20} = 0$ ، در این صورت

حداکثر مقدار  $\sum_{i=1}^{20} \text{rank}(A_i)$  برابر کدام یک است؟

(۱) ۵۰

(۲) ۱۰۰

(۳) ۱۹۰

(۴) ۱۹۹

۱۴- اگر  $x$  ماتریسی  $n \times 1$  روی میدان  $F$  باشد آنگاه  $\det(I_n + xx^t)$  برابر است با:

(۱)  $1 + x^t x$

(۲)  $1 - x^t x$

(۳)  $(1 + x^t x)^2$

(۴)  $(1 - x^t x)^2$

۱۵- فرض کنید  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  است به طوری که  $\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \det(A)$ ، در این صورت کدام یک از مقادیر زیر

نمی‌تواند مقدار ویژه  $A$  باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴)  $\frac{1}{2}$

۱۶- اگر  $A \in M_{10}(\mathbb{R})$  و  $B \in M_{12}(\mathbb{R})$  و  $\det(A) = 2$  و  $\det(B) = 3$ ، در این صورت  $\det(A \otimes B)$  برابر است با: (اگر  $A = (a_{ij})$  و  $B = (b_{ij})$  در این صورت  $A \otimes B = (a_{ij}b_{kl})$ )

(۱)  $2^{10}3^{12}$

(۲)  $2^{12}3^{10}$

(۳)  $6^{10}$

(۴)  $12^{10}$

۱۷- فرض کنید  $G$  یک گروه ساده از مرتبه ۱۶۸ باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبه ۷ در گروه  $G$  برابر

است با:

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۲۴

(۴) ۴۸

۱۸- فرض کنید  $G$  گروه ماتریس‌های  $2 \times 2$  با دترمینان ۱ و با درایه‌های حقیقی است. کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

(۱)  $G$  گروهی ساده است.

(۲) مرکز گروه  $G$  بدیهی است.

(۳)  $G$  بیش از یک زیرگروه از مرتبه ۲ دارد.

(۴)  $G$  دارای نامتناهی عضو مرتبه متناهی است.

۱۹- فرض کنید  $G$  گروهی متناهی است که برای هر زیرگروه دوری مانند  $H$  از  $G$  داریم  $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} = \text{Aut}(H)$

در این صورت:

(۱) اگر عدد اول  $p$  مرتبه گروه را عاد کند آنگاه  $p(p-1) \mid |G|$

(۲) هر زیرگروه دوری در  $G$  نرمال است.

(۳)  $G$  گروهی آبلی است.

(۴)  $G$  گروهی از مرتبه فرد است.

۲۰- چند جمله‌ای  $f(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in \mathbb{Z}_8[x]$ :

(۱) خود توان است.

(۲) مقسوم علیه صفر است.

(۳) وارون پذیر است.

(۴) پوچ توان است.

۲۱- کدام گزینه در مورد حلقه  $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2x-1)}$  درست است؟

(۱) با حلقه  $\left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x] \right\}$  یکرخت است.

(۲) با حلقه  $\mathbb{Z}_2$  یکرخت است.

(۳) با حلقه  $\mathbb{Z}$  یکرخت است.

(۴) میدان است.

در تمامی سؤال‌های زیر حلقه‌ها یک‌دار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

۲۲- فرض کنید  $F$  یک گروه آزاد غیر آبدلی باشد. در این صورت:

(۱) عنصری غیر بدیهی در  $F$  با مرتبه متناهی وجود دارد.

(۲) عنصری غیر بدیهی در  $F$  وجود دارد که مرکز ساز آن غیر دوری است.

(۳) عنصری غیر بدیهی در  $F$  وجود دارد که مرکز ساز آن غیر آبدلی است.

(۴)  $C_F(a)$  که  $a \in F$  و  $a \neq 1$ ، گروهی دوری است.

۲۳- گروه  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  با کدام گروه یکرخت است؟

(۱)  $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۲)  $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۳)  $\mathbb{R}$

(۴)  $\mathbb{Q}$

۲۴- فرض کنید که  $\varphi: M \rightarrow F$  یک  $R$ -همریختی پوشا باشد که در آن  $F$  آزاد است. در این صورت کدام

گزینه صحیح است؟

(۱)  $M$  پروژکتیو (تصویری) است اگر و تنها اگر  $\ker \varphi$  پروژکتیو باشد.

(۲) اگر  $\ker \varphi$  پروژکتیو باشد آنگاه  $M$  پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۳) اگر  $M$  پروژکتیو باشد آنگاه  $\ker \varphi$  پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۴) هیچ ارتباطی بین پروژکتیو بودن  $M$  و  $\ker \varphi$  وجود ندارد.

۲۵- فرض کنید  $F$  یک میدان بوده و  $R = M_p(F)$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یک مدول روی  $R$  وجود دارد که نه تصویری است و نه تزریقی (انژکتیو)
- (۲) هر مدول روی  $R$  هم تزریقی (انژکتیو) است و هم تصویری است.
- (۳) یک مدول روی  $R$  وجود دارد بطوری که تصویری است ولی تزریقی (انژکتیو) نیست.
- (۴) یک مدول روی  $R$  وجود دارد بطوری که تزریقی (انژکتیو) است ولی تصویری نیست.

۲۶- تعداد حلقه‌های ۸ عضوی، که عضو پوچ توان ناصفر ندارند، برابر است با:

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱)  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول تصویری است.
- (۲)  $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$  به عنوان  $\mathbb{Z}$ -مدول انژکتیو است.
- (۳) فرض کنید  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ،  $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت  $\phi: \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  یک به یک است.

(۴) فرض کنید  $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ،  $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت  $\phi: \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$  پوشا است.

۲۸- فرض کنید  $R = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$  و  $M$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی است و  $I = \{(a, 0) \mid a \in \{0, 2, 4, 6\}\}$ .

چنانچه  $f: M \rightarrow N$  یک  $R$ -مدول همریختی و  $\bar{f}: \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{N}{IN}$  با ضابطه  $\bar{f}(m + IM) = f(m) + IN$  داریم:

- (۱) اگر  $\bar{f}$  یک به یک باشد آنگاه  $f$  نیز یک به یک است.
- (۲) اگر  $\bar{f}$  یکرختی باشد آنگاه  $f$  نیز چنین است.
- (۳) اگر  $\bar{f}$  پوشا باشد آنگاه  $f$  نیز پوشاست.
- (۴)  $\bar{f}$  خوش تعریف نمی‌باشد.

۲۹- فرض کنید همریختی مدولی  $f: M \rightarrow N$  دارای این خاصیت است: به ازای هر  $R$ -همریختی

$g: N \rightarrow M$  داریم  $f \circ g \circ f = f$ . که در آن  $M$  و  $N$ ،  $R$ -مدول هستند. در این صورت:

- (۱)  $\ker f$  یک جمعیوند مستقیم  $M$  است.
- (۲)  $\ker f \cong M$
- (۳)  $M$  و  $N$  یکرخت نمی‌باشند.
- (۴)  $M = N$



۳۰- فرض کنید  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است با این خاصیت که هر  $R$  -مدول آزاد  $M$  تمام زیر مدولهایش نیز آزادند. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) هر  $R$  -مدول انژکتیو (تزریقی) است.

(۲)  $R$  یک حوزه ایده‌آل اصلی است.

(۳) هر  $R$  -مدول تصویری است.

(۴)  $R$  یک میدان است.

۳۱- فرض کنیم  $R$  یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد به طوری که هر ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت  $(e)$  است که  $e^2 = e$ . کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) اگر  $a \notin \{0, 1\}$  و  $a$  خودتوان باشد آنگاه  $(a)$  ایده‌آل ماکسیمال است.

(۲)  $R \cong R_1 \times R_2$  که  $R_1$  و  $R_2$  حلقه هستند.

(۳) خودتوانی مانند  $a$  وجود دارد که  $\frac{R}{\text{Ann}(a)}$  میدان است.

(۴) خودتوانی مانند  $a$  وجود دارد که  $\frac{R}{\text{Ann}(1-a)}$  میدان است.

۳۲- فرض کنید  $M$  یک  $R$  -مدول باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱)  $R$  -مدول  $N$  و  $R$  -مدول تصویری  $P$  وجود دارد که  $\frac{N}{P} \cong M$ .

(۲)  $R$  -مدول  $N$  و  $R$  -مدول تصویری  $P$  وجود دارد که  $\frac{P}{N} \cong M$ .

(۳)  $R$  -مدول  $N$  و  $R$  -مدول انژکتیو  $I$  وجود دارد که  $\frac{I}{N} \cong M$ .

(۴)  $R$  -مدول  $N$  و  $R$  -مدول انژکتیو  $I$  وجود دارد که  $\frac{N}{I} \cong M$ .

۳۳- کدام گزینه در مورد  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left( \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right)$  صحیح است؟

(۱) با  $\mathbb{Q} \times G$  یکرخت است که  $G$  یک گروه دوری است.

(۲)  $-\mathbb{Z}$  مدولی یک عضوی است.

(۳) ناصفر است.

(۴) با  $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p_i})$  یکرخت است.

۳۴- کدام گزینه برای هر مجموعه اندازه پذیر  $E \subseteq [0, 1]$  درست است؟ (m اندازه لبگ است و  $E^\circ$  و  $\bar{E}$  به ترتیب درون و بستار E هستند.)

(۱) اگر  $m(E) > 0$  آنگاه  $(\bar{E})^\circ \neq \emptyset$ .

(۲) اگر  $m(E) = 1$  آنگاه  $\bar{E} = [0, 1]$ .

(۳) اگر  $m(E) = 1$  آنگاه  $E^\circ \neq \emptyset$ .

(۴) اگر  $m(E) = 0$  آنگاه E نقطه حدی ندارد.

۳۵- اگر  $\mu$  اندازه مثبت روی  $\sigma$ -جبر M باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $\{A_n\}$  دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه  $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

(۲) اگر  $\{A_n\}$  دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه پذیر دو بدو مجزا باشد و  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه  $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ .

(۳) اگر  $\{A_n\}$  دنباله‌ای تودرتو و صعودی از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

(۴) اگر  $\{A_n\}$  دنباله‌ای تودرتو و نزولی از مجموعه‌های اندازه پذیر باشد و  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

۳۶- اگر  $(X, M, \mu)$  یک فضای اندازه و f و g توابعی حقیقی بر X باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر |f| اندازه پذیر باشد، آنگاه f اندازه پذیر است.

(۲) اگر  $f^n$  برای هر  $n > 4$  اندازه پذیر باشد، آنگاه f اندازه پذیر است.

(۳) اگر  $f + g$  اندازه پذیر باشد، آنگاه  $f - g$  اندازه پذیر است.

(۴) اگر fg اندازه پذیر باشد، و g در هیچ نقطه‌ای صفر نشود،  $\frac{f}{g}$  اندازه پذیر است.

۳۷- کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  و برای هر  $x \in \mathbb{Q}$  و هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E$  اندازه پذیر لبگ باشد، آنگاه E اندازه پذیر لبگ است.

(۲) اگر  $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  خانواده‌ای از توابع اندازه پذیر لبگ باشد آنگاه  $\sup_{\alpha} f_\alpha$  اندازه پذیر است.

(۳) اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تنها در دو نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه f با تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  تقریباً همه جا برابر است.

(۴) خانواده‌ای نامشمار از زیر مجموعه‌های اندازه پذیر لبگ با اندازه لبگ ناصفر دو بدو مجزا وجود دارد.

۳۸- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر تابع نامنفی و انتگرال‌پذیر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  و هر  $\alpha > 0$  برقرار است؟ (m) اندازه لبگ است و  $(E = \{x: f(x) > \alpha\})$

$$m(E) \geq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (1)$$

$$m(E) \leq \alpha \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (2)$$

$$m(E) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (3)$$

$$m(E) \leq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (4)$$

۳۹- فرض کنیم  $n$  عددی طبیعی،  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ،  $\mu$  اندازه شمارشی روی مجموعه توان  $P(X)$  و اندازه  $\nu$  روی  $P(X)$  به صورت  $(E \subseteq X)$   $\nu(E) = \begin{cases} 1 & n \in E \\ 0 & n \notin E \end{cases}$  تعریف شده باشد، اگر تابع  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  با

ضابطه  $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$  تعریف شود، مقدار انتگرال  $\int_X f d(\mu + \nu)$  کدام است؟

$$\frac{n^2 + 1}{n(n+1)} \quad (1)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (4)$$

۴۰- اگر  $(X, M, \mu)$  یک فضای اندازه و  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر نامنفی روی  $X$  و  $f$  تابعی انتگرال‌پذیر و نامنفی روی  $X$  باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \quad \text{اگر } \{f_n\} \text{ نزولی باشد و } f_n \rightarrow f \text{ نقطه‌ای روی } X \text{ آنگاه} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \quad \text{اگر } f_n \rightarrow f \text{ به طور یکنواخت روی } X \text{ آنگاه} \quad (4)$$

۴۱- اگر  $f_n(x) = \frac{1 - \cos(x^n)}{x^{2n}}$  برای  $x > 0$ ، مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n dm$  کدام است؟ (m اندازه لبگ است).

$$0 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$+\infty \quad (4)$$

۴۲- فرض کنیم  $(X, \Sigma, \mu)$  یک فضای اندازه متناهی،  $\{f_n\}$  و  $\{g_n\}$  دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر و  $f$  و  $g$  توابعی اندازه‌پذیر بر  $X$  باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $f_n \rightarrow f$  در اندازه و  $g_n \rightarrow g$  در اندازه آنگاه  $\max\{f_n, g_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$  در اندازه.

(۲) اگر  $f_n \rightarrow f$  در اندازه و  $g_n \rightarrow g$  در اندازه آنگاه  $f_n g_n \rightarrow f g$  در اندازه.

(۳) اگر  $f_n \rightarrow f$  در اندازه هر زیر دنباله از  $\{f_n\}$  تقریباً همه‌جا به  $f$  میل می‌کند.

(۴) اگر  $f_n \rightarrow f$  تقریباً همه‌جا آنگاه  $f_n \rightarrow f$  در اندازه.

۴۳- اگر  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی  $[0, 1]$  و  $f$  تابعی انتگرال‌پذیر لبگ روی  $[0, 1]$  باشد، کدام گزینه درست است؟ ( $m$  اندازه لبگ است).

(۱) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$  آنگاه برای هر  $n \in \mathbb{N}$  تقریباً همه‌جا کراندار است.

(۲) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$  آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ .

(۳) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$  آنگاه  $f_n \rightarrow f$  تقریباً همه‌جا.

(۴) اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$  آنگاه  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$ .

۴۴- فرض کنیم  $X$  و  $Y$  فضاهای باناخ و  $T: X \rightarrow Y$  عملگری خطی و کراندار با برد چگال در  $Y$  باشد به طوری که برای هر  $x \in X$  که  $\|x\|=1$ ،  $\|Tx\| \geq 1$ . کدام گزینه درست است؟

(۱)  $T$  پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

(۲)  $T$  یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(۳)  $T$  دوسویی است و  $\|T^{-1}\| \geq 1$ .

(۴)  $T$  دوسویی است و  $\|T^{-1}\| \leq 1$ .

۴۵- فرض کنیم  $H$  یک فضای هیلبرت و  $M$  و  $N$  زیر فضاهای  $H$  باشند. در این صورت مجموعه  $(M \cap N)^\perp$ :

(۱) برابر بستار  $M^\perp + N^\perp$  است، هرگاه  $M$  و  $N$  بسته باشند.

(۲) همواره مشمول در  $M^\perp + N^\perp$  است.

(۳) همواره برابر بستار  $M^\perp + N^\perp$  است.

(۴) همواره برابر  $M^\perp + N^\perp$  است.