کد کنترل

693A

693A

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»
مقام معظم رهبری

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۱۴۰۴/۱۱/۱۰
دفترچه شماره ۲ از ۲

آزمون ورودی دوره‌های دکتری (نیمه‌متمرکز) ـ سال ۱۴۰۵
علوم کامپیوتر و بیوانفورماتیک (کد ۲۲۴۷)

تعداد سؤال: ۹۰ سؤال

مدت‌زمان پاسخ‌گویی: ۱۳۵ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	ساختمان داده و الگوریتم ـ مبانی منطق ـ مبانی ترکیبیات ـ جبر خطی عددی	۳۵	۱	۳۵
۲	نظریه الگوریتم پیشرفته	۱۰	۳۶	۴۵
۳	زیست‌شناسی سلولی و مولکولی ـ آمار و احتمال ـ ساختمان داده و الگوریتم ـ ریاضیات گسسته	۴۵	۴۶	۹۰

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به‌منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان‌بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخ‌نامه و دفترچه سؤالات، نوع و کدکنترل درج‌شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخ‌نامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

ساختمان داده و الگوریتم ـ مبانی منطق ـ مبانی ترکیبات ـ جبر خطی عددی:

۱- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ $n! = O(n^n)$

ب ـ $2^n = O(n!)$

ج ـ $\sum_{i=1}^{n} i \log i = \theta(n^2 \log n)$

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۲- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ $\log(n!) = \theta(n \log n)$

ب ـ اگر $a > 1$ و $f(n) = \theta(\log_a^n)$ آنگاه $f(n) = \theta(\ln n)$

ج ـ $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \theta(\log n)$

د ـ $\sum_{i=1}^{n} i^k = \theta(n^{k+1})$ ، k عددی طبیعی است.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۳- فرض کنید $T(n)$ تعداد دفعاتی باشد که دستور $x++$ در مجموعه دستورات زیر اجرا می‌شود. در این صورت کدام مورد درست است؟

```
j = n ;
while (j >= ۱)
{
    for (i = ۱; i <= j; i++)
        x++;
    j = j/۲;
 }
```

۱) $T(n) = \theta(n)$

۲) $T(n) = \theta(n \log n)$

۳) $T(n) = \theta(\log n)$

۴) $T(n) = \theta(n^۲ \log n)$

۴- فرض کنید می‌خواهیم چند جمله‌ای $P(x) = a_۰ + a_۱x + a_۲x^۲ + \cdots + a_{n-۱}x^{n-۱}$ را در نقطه $x_۰$ ارزیابی کنیم. یک الگوریتم تقسیم و غلبه به‌صورت زیر داریم:

- اگر $n = ۱$، مقدار $a_۰$ را برگردان.
- اگر $n > ۱$، چند جمله‌ای را به دو قسمت مساوی تقسیم کن:

$$P(x) = P_{low}(x) + x^{\frac{n}{۲}} \cdot P_{high}(x)$$

که در آن:

$$P_{low}(x) = a_۰ + a_۱x + \cdots + a_{\frac{n}{۲}-۱}x^{\frac{n}{۲}-۱}$$

$$P_{high}(x) = a_{\frac{n}{۲}} + a_{\frac{n}{۲}+۱}x + \cdots + a_{n-۱}x^{\frac{n}{۲}-۱}$$

سپس به‌طور بازگشتی $P_{low}(x_۰)$ و $P_{high}(x_۰)$ را محاسبه کرده و در نهایت

$$P(x_۰) = P_{low}(x_۰) + (x_۰)^{\frac{n}{۲}}.P_{high}(x_۰)$$

را برگردان.

اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $n = ۲^k$ و هزینه محاسبه $(x_۰)^{\frac{n}{۲}}$ را نیز درنظر بگیریم، تعداد جمع‌ها و ضرب‌های این الگوریتم در بدترین حالت چقدر است؟

۱) $n-۱$ ضرب و $n-۱$ جمع

۲) $\frac{n}{۲}\log_۲ n$ ضرب و $n-۱$ جمع

۳) $\frac{۳n}{۲}-۲$ ضرب و $n-۱$ جمع

۴) $۲n-۱$ ضرب و n جمع

۵- یک آرایه $A[1\cdots n]$ از اعداد صحیح داریم که برای همه $1 \le i < n$ داریم:

$$|A[i] - A[i+1]| \le 1$$

همچنین $A[1] = x$ و $A[n] = y$ و $x < y$.

می‌خواهیم یک الگوریتم جست‌وجو طراحی کنیم که یک مقدار z با $x < z < y$ را در آرایه پیدا کند (یعنی اندیس j به‌طوری‌که $A[j] = z$). حداکثر تعداد مقایسه‌ها برای یافتن z با استفاده از یک روش بهینه کدام است؟ (فرض کنید این z حتماً وجود دارد.)

۱) $O(y - x)$

۲) $O(\log n)$

۳) $O(n)$

۴) $O(\sqrt{n})$

۶- می‌خواهیم k امین کوچک‌ترین عنصر را در یک دنباله از داده‌ها که به‌صورت برخط (online) و یکی یکی دریافت می‌شوند، پیدا کنیم. توجه کنید که:

- مقدار k از قبل معلوم است.
- n (تعداد کل عناصر) تا پایان داده‌ها معلوم نیست.
- حافظه‌ی مجاز $O(k)$ سلول حافظه.
- زمان مورد انتظار $O(n)$.

یک روش پیشنهادی به‌صورت زیر عمل می‌کند:

الف ـ یک آرایه A با ظرفیت $c \cdot k$ (مثلاً $c = 2$) در نظر بگیرید.

ب ـ تا وقتی که آرایه پر نشده، عناصر ورودی را در آن ذخیره کن.

ج ـ وقتی آرایه پر شد (مثلاً $2k$ عنصر)، با استفاده از الگوریتم انتخاب (Quick Select) یا میانه میانه‌ها (Median Medians)، k امین کوچک‌ترین عنصر را در این آرایه پیدا کن و فقط k عنصر کوچک‌تر را در آرایه نگهدار و بقیه را دور بریز.

د ـ این روند را برای عناصر بعدی ادامه بده: هر عنصر جدید را اگر از بزرگ‌ترین عنصر در آرایه کوچک‌تر است، جایگزین آن کن و دوباره k امین کوچک‌ترین را در آرایه بروز کن.

هـ ـ در پایان، k امین عنصر در آرایه نهایی، k امین کوچک‌ترین در دنباله است.

کدام عبارت درباره این الگوریتم نادرست است؟

۱) در هر مرحله، اندازه آرایه $O(k)$ باقی می‌ماند.

۲) پیچیدگی زمانی مورد انتظار کل الگوریتم $O(n)$ است.

۳) این الگوریتم حتی اگر $k = O(\log n)$ باشد، هم‌چنان $O(n)$ زمان می‌برد.

۴) الگوریتم می‌تواند بدون استفاده از هیچ‌گونه روش تصادفی‌سازی (randomization)، در زمان قطعی $O(n)$ اجرا شود.

۷- **فرض کنید که شما در حال طراحی یک الگوریتم برای حل مسئله تقسیم کارگران به پروژه‌ها هستید. در این مسئله، شما تعدادی پروژه و تعدادی کارگر دارید که هر کارگر می‌تواند در چند پروژه فعالیت کند، اما محدودیت‌هایی در این زمینه وجود دارد: هر کارگر یک ظرفیت محدود دارد (یعنی می‌تواند در تعداد محدودی پروژه فعالیت کند) و هر پروژه نیز باید حداقل تعداد خاصی از کارگران را داشته باشد. هدف شما این است که تعداد کارگران را به حداقل برسانید، با این حال هر کارگر باید برای پروژه‌ها به‌طور کامل اختصاص یابد و هیچ پروژه‌ای نباید بدون کارگر بماند.**
در این شرایط، یک روش حریصانه برای انتصاب کارگران به پروژه‌ها که حتماً یک جواب تولید می‌کند، کدام است؟

۱) انتخاب کارگری که بیشترین تعداد پروژه را می‌تواند پوشش دهد و تخصیص او به پروژه‌هایی با کمترین نیاز به کارگر.

۲) انتخاب کارگری که برای پروژه‌های جدید کمترین زمان را نیاز دارد و تخصیص او به پروژه‌هایی که زمان شروع کمتری دارند.

۳) انتخاب کارگری که کمترین هزینه (مانند حقوق یا هزینه فعالیت) دارد و تخصیص او به پروژه‌هایی که بیشترین ارزش را دارند.

۴) انتخاب کارگری که کمترین ظرفیت اشغال‌شده را دارد، یعنی کارگری که در حال حاضر کمترین تعداد پروژه را دارد و تخصیص او به پروژه‌هایی که بیشترین نیاز به کارگر دارند.

۸- **در مسئله کوله‌پشتی، هدف انتخاب اشیاء با بیشترین مجموع ارزش و قرار دادن آن‌ها در یک کیف است به طوری که کیف ظرفیت وزنی محدودی دارد و هر شئ ارزش و وزن خود را دارد. الگوریتم حریصانه اگر نسبت ارزش به وزن برای یک شیئ از شئ دیگر بیشتر باشد به آن اولویت بیشتری می‌دهد. بهترین دلیل برای اینکه الگوریتم حریصانه در همه موارد بهینه نخواهد بود، کدام گزینه است؟**

۱) انتخاب شیء با نسبت ارزش به وزن بیشتر ممکن است فضای زیادی از کیف را اشغال کند، که در مراحل بعدی به انتخاب‌های بدتری منتهی می‌شود.

۲) این الگوریتم به‌صورت فرا ابتکاری عمل می‌کند و لذا لزوماً جواب بهینه را نمی‌دهد.

۳) انتخاب شیء با نسبت بالاتر همیشه بهترین انتخاب است.

۴) این الگوریتم زمانی بهینه است که تمام اشیاء از ارزش مشابهی برخوردار باشند.

۹- **n داده را در k هرم به‌طور مساوی تقسیم کرده‌ایم. هرم جدیدی طراحی می‌کنیم که از ساختمان این k هرم استفاده نماید. در این هرم عملیات Enqueue و Dequeue باید یک عنصر به یکی از این هرم‌ها اضافه نماید و هم‌چنین یک عنصر (عنصر بیشینه) را return نماید. مرتبه زمانی عملیات Enqueue و Dequeue هرم جدید چقدر است؟**

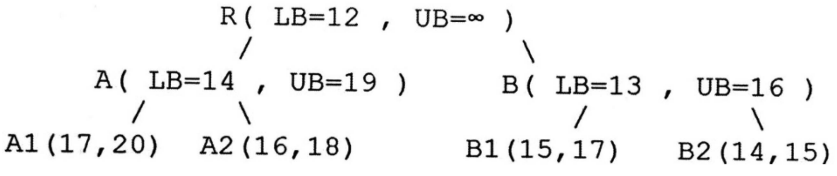
۱) $O(k \times \log \frac{n}{k})$

۲) $O(k + \log \frac{n}{k})$

۳) $O(\log(k + \frac{n}{k}))$

۴) $O(\log k + \log \frac{n}{k})$

۱۰- یک مسئله مینمم‌سازی داریم و درخت جست‌وجوی زیر تا این مرحله ساخته شده است:



در این لحظه، یک قید جدید به مسئله اضافه می‌شود که باعث می‌شود همه گره‌هایی که $cost < ۱۵$ دارند، نامعتبر شوند. (یعنی گره‌هایی با **LB** یا **UB** کمتر از ۱۵ دیگر قابل استفاده نیستند.)

اگر در این لحظه بهترین جواب ممکن $f^* = ۱۸$ باشد،

کدام گزینه به درستی نشان می‌دهد که کدام گره‌ها حذف (**prune**) می‌شوند و کدام گره بعدی برای انبساط انتخاب خواهد شد؟ (با فرض روش **Best-First Search**)

۱) حذف B۲ ـ انبساط بعدی A۲

۲) حذف A۲, B۲ ـ انبساط بعدی B۱

۳) حذف A۱, B۲ ـ انبساط بعدی B۱

۴) حذف A۲, B۱, B۲ ـ انبساط بعدی A۱

۱۱- در مسئله **Subset Sum Problem**، شما یک مجموعه از اعداد دارید و می‌خواهید تعیین کنید که آیا زیرمجموعه‌ای از این اعداد وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر یک عدد هدف مشخص باشد. شما از الگوریتم بازگشت به عقب برای حل این مسئله استفاده می‌کنید. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ الگوریتم بازگشت به عقب به دلیل جست‌وجوی همه حالت‌ها پیچیدگی زمانی $O(۲^n)$ دارد.

ب ـ در این مسئله، الگوریتم بازگشت به عقب به‌طور تصادفی ترکیب‌های مختلف اعداد را بررسی می‌کند.

ج ـ الگوریتم بازگشت به عقب برای این مسئله به جواب درست می‌رسد.

د ـ الگوریتم بازگشت به عقب بررسی می‌کند که برای هر عدد در مجموعه، دو انتخاب وجود دارد، یا آن عدد را شامل کنیم یا آن را نادیده بگیریم.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۲- یک فایل متنی از ۲۵۶ نوع حرف ۸ بیتی تشکیل شده است. فرض کنید بیشترین تعداد دفعات تکرار یک حرف در این فایل **M** و کمترین تعداد دفعات تکرار یک حرف **m** است. با این تعریف، فرض کنید $M < ۲m$. اگر اندازه فایل فشرده شده با الگوریتم هافمن را S_H و اندازه فایل اصلی را S_o بنامیم. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $S_H = S_o$

۲) $S_H < S_o$

۳) $S_H > S_o$

۴) هیچ‌کدام

۱۳- فرض کنیم زبان L شامل نمادهای محمولی یک موضعی G و B و نماد محمولی دو موضعی E باشد. ساخت (تعبیر) M را با عالم سخن $U = \{۰۱, ۰۲, ۰۳, ۰۴, ۰۵, ۰۶, ۰۷, ۰۸, ۰۹\}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$G^M = \{۰۳, ۰۶, ۰۹\}$

$B^M = \{۰۲, ۰۴, ۰۵, ۰۸\}$

$E^M = \{(۰۳, ۰۲), (۰۶, ۰۸), (۰۴, ۰۳), (۰۹, ۰۲)\}$

اگر مفهوم موردنظر به‌طور شهودی به‌صورت زیر باشد:

$B(x)$: x پسر است $G(x)$: x دختر است

$E(x, y)$: x، y را دوست دارد

از دو گزاره زیر کدام در تعبیر فوق درست است؟

(a) هر دختر دقیقاً یک پسر را دوست دارد.

(b) بعضی پسرها بعضی دخترها را دوست دارند.

۱) فقط (a) ۲) فقط (b) ۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

۱۴- فرض کنید

$B(x)$: x پسر است

$E(x, y)$: x، y را دوست دارد

$H(x, y)$: x از y بدش می‌آید

کدام گزاره بهترین ترجمه برای گزاره زیر است:

«هر پسری که مریم را دوست داشته باشد از هر پسر دیگری که مریم او را دوست داشته باشد، بدش می‌آید»

۱) $\forall x((B(x) \wedge E(x, Maryam)) \wedge \forall y((B(y) \wedge E(Maryam, y)) \rightarrow H(x, y)))$

۲) $\forall x((B(x) \wedge E(x, Maryam)) \wedge \forall y((B(y) \wedge E(Maryam, y)) \wedge y \neq x) \rightarrow H(x, y)))$

۳) $\forall x((B(x) \wedge E(x, Maryam)) \rightarrow \forall y((B(y) \wedge E(Maryam, y)) \rightarrow H(x, y)))$

۴) $\forall x\big((B(x) \wedge E(x, Maryam)) \rightarrow \forall y((B(y) \wedge E(Maryam, y) \wedge y \neq x) \rightarrow H(x, y))\big)$

۱۵- فرض کنیم α یک فرمول در منطق گزاره‌ها شامل سه گزاره اتمی p و q و r باشد. اگر در جدول ارزش α دقیقاً چهارسطر با ارزش ۱ مطابق جدول زیر وجود داشته باشد، کدام مورد صورت نرمال عطفی (CNF) معادل برای α است؟

p	q	r	α
۱	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱
۱	۰	۱	۱
۰	۱	۱	۱

۱) $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$

۲) $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)$

۳) $(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \wedge r)$

۴) $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg qr) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

۱۶- دو استدلال زیر را در نظر بگیرید:

(a)

تمام انسان‌ها متفکر هستند.

بنابراین بعضی متفکرها نادان هستند.

بعضی انسان‌ها نادان هستند.

(b)

تمام انسان‌ها متفکر هستند.

بنابراین هیچ انسانی نادان نیست.

هیچ نادانی متفکر نیست.

کدام استدلال معتبر است؟

۱) فقط (a) ۲) فقط (b)

۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

۱۷- گزارهٔ «در کنکور پذیرفته می‌شوم فقط اگر به تعداد زیادی از سؤالات پاسخ درست بدهم» با کدام گزارهٔ معادل است؟

(a) اگر به تعداد زیادی از سؤالات پاسخ درست ندهم آنگاه در کنکور پذیرفته نمی‌شوم.

(b) اگر به تعداد زیادی از سؤالات پاسخ درست بدهم آنگاه در کنکور پذیرفته می‌شوم.

۱) فقط (a) ۲) فقط (b) ۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

۱۸- خانواده S از مجموعه‌ها را پذیرفتنی گوئیم هرگاه $\bigcup S \subseteq S$.

از دو مجموعه زیر کدام پذیرفتنی است؟

$s_1 = \{\phi, \{\phi\}\}$

$s_2 = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

۱) فقط S_1 ۲) فقط S_2 ۳) هردو ۴) هیچ‌کدام

۱۹- از دو گزاره زیر کدام درست است؟

(a) فرض کنیم $(A, <_A)$ یک مجموعه مرتب خطی باشد. اگر $f: A \to A$ حافظ ترتیب باشد، آنگاه f تابع همانی است.

(b) اگر B مجموعه شمارا باشد آنگاه B خوش‌ترتیب شدنی است.

۱) فقط (a) ۲) فقط (b) ۳) هردو ۴) هیچ کدام

۲۰- در قطعه برنامه زیر i و j و k و Cod متغیرهای درست هستند. مقداری که متغیر Cod پس از اجرای قطعه کد می‌گیرد، کدام است؟

```
Cod = 10;
for (i = 1 ; i <= 15; i++)
    for(j = i ; j =< 15; j++)
        for(k = j ; k <= 15 ; k++)
            Cod++;
```

۱) ۶۱۰ ۲) ۶۹۰

۳) ۶۳۰ ۴) ۷۱۰

۲۱- در هر یک از ۳۲ دفتر کار یک دانشکده یک کامپیوتر شخصی وجود دارد. ۱۵ تای آنها چاپگر لیزری، ۱۰ تای آنها اسکنر و ۸ تای آنها مودم دارند. دو تای آنها هر سه وسیله چاپگر لیزری و اسکنر و مودم را دارند. حداقل چندتای آنها هیچ‌یک از این سه وسیله را ندارند؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۲۲- صورت نرمال اساسی ترکیب عطفی عبارت $(p \Rightarrow r) \wedge (p \Leftrightarrow q)$ کدام است؟

۱) $\sum m(0,1,7)$ ۲) $\prod m(0,1,3,4,6)$

۳) $\sum m(2,5,7)$ ۴) $\prod m(2,3,4,5,6)$

۲۳- اگر R_1 و R_2 دو رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه A باشند، آنگاه کدام مورد از روابط زیر روی A هم‌ارزی است؟

۱) $R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$ ۲) $R_1^{-1} \cup R_2$

۳) $R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$ ۴) $R_1 \cup R_2^{-1}$

۲۴- اگر گراف کامل k_n یک گراف اویلری باشد آنگاه n کدام است؟ $(k \in \mathbb{N})$

۱) $2k+1$ ۲) $3k+1$

۳) $2k$ ۴) ۲

۲۵- اگر $G(V,E)$ گراف همبندی باشد که در آن $|E| = ۱۷$ و به‌ازای هر رأس $x \in V$ داشته باشیم $\deg(x) \geq ۳$. آنگاه ماکزیمم مقدار $|V|$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۱۱
۳) ۱۴
۴) ۱۷

۲۶- کدام مورد از طرح‌های بلوکی با پارامترهای زیر ممکن است، وجود داشته باشد؟

۱) $(\vartheta = ۱۰, k = ۳, \lambda = ۱)$
۲) $(\vartheta = ۸, k = ۳, \lambda = ۱)$
۳) $(\vartheta = ۱۲, k = ۴, \lambda = ۱)$
۴) $(\vartheta = ۹, k = ۳, \lambda = ۱)$

۲۷- فرض کنید a_n تعداد طرق نوشتن عدد طبیعی n، صرف‌نظر از ترتیب، به‌صورت مجموع اعداد ۱ و ۳ باشد، تابع مولد دنباله a_n کدام است؟

۱) $\frac{۱-x}{۱-۳x}$
۲) $\frac{۱}{(۱-x)(۱-۳x)}$
۳) $\frac{۱}{(۱-x)(۱-x^۳)}$
۴) $(۱-x)(۱-۳x)$

۲۸- چند تا از گزاره‌های زیر در مورد گراف $G = (V, E)$ درست است؟

الف ـ اگر G دوری همیلتونی داشته باشد آنگاه برای هر رأس $\vartheta \in V$ داریم $\deg(\vartheta) \geq ۲$.

ب ـ اگر G یک گراف بدون طوقه‌ای باشد که در آن $|V| = n \geq ۲$ و به‌ازای هر دو رأس متمایز $x,y \in v$ داشته باشیم $\deg(x) + \deg(y) \geq n - ۱$ آنگاه G مسیری همیلتونی دارد.

ج ـ اگر G یک گراف بدون جهت و بدون طوقه باشد که $|V| = n \geq ۳$ و به‌ازای هر دو رأس غیرمجاور x, y داشته باشیم. $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ آنگاه G دوری همیلتونی دارد.

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

۲۹- کدام مورد برای عدد وضعیت ماتریس A که به‌صورت $\text{cond}_P(A) = \|A\|_P \|A^{-۱}\|_P$ تعریف می‌شود، نادرست است؟

۱) $\text{cond}_P(A^T) = \text{cond}_P(A)$
۲) $\text{cond}_P(A) = \text{cond}_P(A^{-۱})$
۳) $\text{cond}_P(A) \geq ۱, P \geq ۱$
۴) $\text{cond}_۲(A) = ۱$ اگر و فقط اگر $A = I$

۳۰- برای حل دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۱۰^{-۱۰} x_۱ + x_۲ = ۱ \\ x_۱ + ۲x_۲ = ۳ \end{cases}$ که در دستگاه ممیز شناور با دقت ده‌رقم اعشاری محاسبات صورت می‌پذیرد، از روش حذفی گاوس بدون محورگیری جزیی استفاده می‌کنیم. جواب حاصل از به‌کارگیری این روش کدام است؟

۱) $x_۱ = -۱, x_۲ = ۲$
۲) $x_۱ = ۰, x_۲ = ۱$
۳) $x_۱ = ۰, x_۲ = ۱/۵$
۴) $x_۱ = ۱, x_۲ = ۱$

۳۱- فرض کنید در روش تجزیه LU داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & -۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ -۱/۵ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۲ & -۱۰ \\ ۰ & ۰ & -۲ \end{bmatrix} = U.$$

اگر $A = LU$، آنگاه ماتریس L کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۱ & ۰ \\ ۱/۵ & ۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۲) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ -۱/۵ & ۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ ۰/۷۵ & -۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۱ & ۰ \\ -۰/۷۵ & -۰/۲۵ & ۱ \end{bmatrix}$

۳۲- فرض کنید $QH = \begin{pmatrix} ۳ & ۶ & ۵ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۴ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ که در آن Q یک ماتریس متعامد و H یک ماتریس بالاهسنبرگی است، یعنی $H_{ij} = ۰ \ , i > j+۱$. مقدار $|Q_{۳۴}|$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$

۴) صفر

۳۳- فرض کنید Q یک ماتریس متعامد باشد. کدام مورد نادرست است؟ ($\|\ \|_F$ نماد نرم فروبینوس است.)

۱) $\|AQ\|_۲ = \|A\|_۲$

۲) $\|AQ\|_F = \|A\|_F$

۳) $\|Q\|_۲ = ۱$

۴) $\|Q\|_F = ۱$

۳۴- فرض کنید $A_{n\times n} = U\Sigma V^T$ که $U_{n\times n}$ و $V_{n\times n}$ ماتریس‌های متعامد و $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_۱,\ldots,\sigma_n)$ یک ماتریس قطری با درایه‌های قطری $\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_n > ۰$ باشد. کدام مورد درست است؟

۱) اگر $A \neq I$ آنگاه $\|A\|_F > \sqrt{\sigma_۱^۲ + \cdots + \sigma_n^۲}$

۲) $\|A\|_F < \sqrt{\sigma_۱^۲ + \cdots + \sigma_n^۲}$ و $\|\Sigma\|_F = \sqrt{\sigma_۱^۲ + \cdots + \sigma_n^۲}$

۳) $\left\|A^{-۱}\right\|_۲ = \frac{۱}{\sigma_n}$

۴) $\left\|A^{-۱}\right\|_۲ = \frac{۱}{\sigma_۱}$

۳۵- جواب مسئله کمترین مربعات دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 3x+y=1 \\ x-y=2 \\ 2x+3y=1 \end{cases}$ متناظر با جواب کدام دستگاه معادلات خطی زیر است؟

۱) $\begin{cases} 14x+8y=7 \\ 8x+9y=2 \end{cases}$

۲) $\begin{cases} 14x+7y=7 \\ 8x+11y=2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} 10x+2y+9z=1 \\ 2x+2y-z=2 \\ 9x-y+13z=1 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} 13x+2y+9z=1 \\ 2x+2y-z=2 \\ 9x-y+10z=1 \end{cases}$

نظریه الگوریتم پیشرفته:

۳۶- یک شمارنده دودویی m بیتی $b_1 \dots b_{m-1} b_m$ را در نظر بگیرید که در آن تغییر بیت i یعنی b_i هزینه‌ای برابر i دارد. مثلاً اگر شمارنده از عدد ۱۰۱۱۱ به ۱۱۰۰۰ افزایش یابد، هزینه‌ای برابر $10=4+3+2+1$ خواهد داشت. هزینه سرشکنی عمل افزایش در این شمارنده‌های دودویی کدام است؟

۱) $O(1)$

۲) $O(m)$

۳) $O(m^2)$

۴) $O(m \log m)$

۳۷- دو مسئله تصمیم‌گیری A و B داده شده‌اند. می‌دانیم که A، $NP-$ تمام است ولی B را می‌توان در $O(n^2 \log^4 n)$ حل کرد. همچنین می‌دانیم $B \leq_p A$ (یعنی هر مورد از مسئله B را می‌توان در زمان چندجمله‌ای به یک مورد از مسئله A تبدیل کرد.) کدام مورد درست است؟

۱) $P \neq NP$

۲) $P = NP$ ولی برخی از مسئله‌های NP در زمان بیشتر از $O(n^3)$ حل می‌شوند.

۳) $P = NP$ و هر مسئله NP را می‌توان در زمان $O(n^3)$ حل کرد.

۴) نمی‌دانیم که آیا $P = NP$ است یا نیست.

۳۸- چندتا از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف ـ برای هر الگوریتم قطعی اگر $f(n)$ زمان اجرا در بدترین حالت و $g(n)$ زمان اجرای حالت میانگین باشد آنگاه $f(n)=\theta(g(n))$.

ب ـ اگر $F(n)=\sqrt{n}$ و $g(n)=n.(n \bmod 100)$ آنگاه $F(n)=O(g(n))$

ج ـ تابع‌های $F(n)$ و $g(n)$ وجود دارند به‌طوری‌که $F(n)=O(g(n))$ و $F(n)=\omega(g(n))$

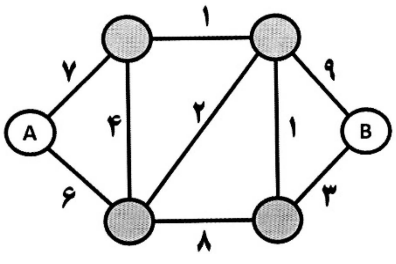
۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

۳۹- بین منبع آب A و مصرف‌کننده B به‌صورت شکل زیر لوله‌کشی شده است. عددی که بر روی هر لوله نوشته شده است، نشان‌دهنده حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است. مصرف‌کننده در بهترین حالت چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟



۱) ۲
۲) ۷
۳) ۹
۴) ۱۱

۴۰- فرض کنید در یک نمونه از مسئله (TSP)، رئوس، نقاطی در صفحه هستند و هزینه $c(u,v)$ برابر فاصله اقلیدسی بین نقاط u و v است. می‌خواهیم ثابت کنیم که در تور بهینه، هیچ دو یال یکدیگر را قطع نمی‌کنند. کدام استدلال، مطلب را به‌درستی اثبات می‌کند؟

۱) اگر دو یال یکدیگر را قطع کنند، با استفاده از نامساوی مثلث، می‌توان نشان داد که هزینه تور بهینه نیست.
۲) در فاصله اقلیدسی، تور بهینه باید یک چندضلعی ساده باشد و از آنجا که چندضلعی‌های ساده خود ـ متقاطع نیستند، تقاطع رخ نمی‌دهد.
۳) اگر توری دارای تقاطع باشد، با حذف دو یال متقاطع و اضافه کردن دو یال جدید که تقاطع را حذف می‌کنند، یک تور با هزینه کمتر یا مساوی به‌دست می‌آید و این روند را می‌توان تا حذف تمام تقاطع‌ها ادامه داد.
۴) اگر دو یال (a,b) و (c,d) در تور همدیگر را قطع کنند، با جایگزینی آنها با دو یال (a,c) و (b,d) یا (a,d) و (b,c)، می‌توان توری با هزینه کمتر ساخت، زیرا در چهارضلعی محدب، مجموع قطرها از مجموع دو ضلع مقابل بیشتر است.

۴۱- یک هیپ فیبوناچی (Fibonacci Heap) شامل n گره است. عملیات کاهش کلید (Decrease-Key) در آن ممکن است باعث قطع شدن چندین گره از والدشان شود. اکنون فرض کنید توالی‌ای از عملیات شامل n بار insert و سپس n بار decrease-key و در پایان delete-min انجام می‌شود. کدام گزینه به درستی میانگین زمان اجرای سرشکن (amortized time) این توالی را توصیف می‌کند؟

۱) $O(n\sqrt{n})$ چون تعداد گره‌های ریشه در بدترین حالت به $\sqrt{n}$ محدود می‌شود.
۲) $O(n \log n)$ زیرا هر عملیات کاهش کلید می‌تواند تا عمق درخت پیمایش کند.
۳) $O(n \log^2 n)$ چون عملیات حذف حداقل نیاز به ادغام درخت‌های با درجات مختلف دارد.
۴) $O(n)$ زیرا عملیات decrease-key و insert هر دو دارای هزینه سرشکن $O(1)$ هستند و تنها delete-min هزینه $O(\log n)$ دارد.

۴۲- در الگوریتم کوتاه‌ترین مسیر تک‌مبدأ (Single Source Shortest Paths)، فرض کنید وزن همه یال‌ها غیرمنفی و گراف همبند باشد. زیرگرافی با کمترین یال که شامل تمام یال‌هایی است که برای تشکیل مسیرهای کوتاه‌ترین از رأس v انتخاب می‌شوند، چه ویژگی‌ای دارد؟

۱) همیشه یک درخت پوشا ریشه‌دار در v است.
۲) ممکن است شامل دورهایی از یال‌هایی با وزن صفر باشد.
۳) الزاماً یک جنگل از درخت‌های جداگانه است.
۴) همیشه یک گراف مسطح (planar) است.

۴۳- **فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون جهت و همبند باشد. می‌خواهیم رأسی را بیابیم که با حذف آن، گراف همچنان همبند باقی بماند (یعنی رأس مزبور نقطه برش نباشد). کدام گزینه الگوریتمی با زمان اجرای خطی برای یافتن چنین رأسی را توصیف می‌کند؟**

۱) اجرای الگوریتم Dijkstra و انتخاب رأسی که در کوتاه‌ترین مسیر بیشترین فاصله را دارد.

۲) اجرای BFS و انتخاب رأسی با بیشترین درجه، چون احتمالاً گراف را متصل نگه می‌دارد.

۳) استفاده از الگوریتم مؤلفه‌های دو ـ اتصال (biconnected components) برای یافتن رأس مناسب.

۴) اجرای DFS از یک رأس دلخواه و انتخاب هر رأس برگ (leaf) در درخت DFS، زیرا حذف برگ باعث قطع هیچ مسیر ارتباطی نمی‌شود.

۴۴- **کدام‌یک از گزاره‌های زیر درخصوص الگوریتم‌های تقریبی برای مسئله‌های پوشش رأس (Vertex Cover) و پوشش مجموعه (Set Cover) درست است؟**

۱) برای هر دو مسئله پوشش رأس و پوشش مجموعه، تحت فرض $P \neq NP$، هیچ الگوریتم تقریبی با ضریب ثابت وجود ندارد.

۲) الگوریتم مبتنی‌بر انتخاب رئوس تطابق ماکسیمال، یک الگوریتم ۲− تقریبی است، در حالی‌که الگوریتم حریصانه برای پوشش مجموعه می‌تواند در بدترین حالت یک ضریب تقریب لگاریتمی نسبت به تعداد عناصر پایه داشته باشد.

۳) هم مسئله پوشش رأس و هم پوشش مجموعه، دارای الگوریتم‌های تقریبی با ضریب ثابت (مستقل از اندازه ورودی) هستند.

۴) الگوریتم حریصانهٔ پوشش مجموعه، یک الگوریتم ۲− تقریبی برای همهٔ حالات ورودی است.

۴۵- **کدام مورد درست است؟**

۱) $EXP \subseteq P$ ۲) $NEXP \subseteq NP$

۳) $P \subseteq NP$ ۴) $NP\text{-}Hard \subseteq NP$

زیست‌شناسی سلولی و مولکولی ـ آمار و احتمال ـ ساختمان داده و الگوریتم ـ ریاضیات گسسته:

۴۶- **کدام مورد درخصوص دسترسی به کروماتین، جهت اتصال پروتئین‌های تنظیمی افزایش می‌یابد؟**

۱) کرومودمین بعد از متیله‌شدن کروماتین ۲) کرومودمین بعد از استیله‌شدن کروماتین

۳) برومودمین بعد از متیله‌شدن کروماتین ۴) برومودمین بعد از داستیله‌شدن کروماتین

۴۷- **عامل شناسایی پروتئین‌هایی که بعد از سنتز در سیتوزول از طریق یک انتهای آبگریز در غشای ER قرار می‌گیرند (Tail – anchored proteins)، کدام است؟**

۱) P۹۷ ۲) OS۹

۳) Get۳ ۴) ATF۶

۴۸- **کدام‌یک از طریق آندوسیتوز صورت نمی‌گیرد؟**

۱) جذب مواد زائد خارج سلولی

۲) تنظیم میزان حضور پروتئین‌ها در سطح سلول مانند گیرنده‌های هورمونی

۳) ورود بعضی از هورمون‌های آب‌گریز مثل تستوسترون که در سطح سلول، گیرنده‌ای ندارند.

۴) بازیابی غشایی که در طی فرایند ترشح به‌غشای پلاسمایی اضافه شده است.

۴۹- **کدام مورد بر اثر فعال‌شدن مسیر PI3K ـ AKt رخ نمی‌دهد؟**

۱) افزایش سنتز پروتئین از طریق فعال‌شدن مسیر $mTORC_1$

۲) فعال‌شدن مستقیم BAD و القای آپوپتوز

۳) مهار فعالیت FOXO3a از طریق خروج آن از هسته

۴) مهار فعالیت GSK3B از طریق فسفریلاسیون

۵۰- **کدام پروتئین در ساختمان همی‌دسموزوم نقش ندارند؟**

۱) کراتین ۲) اینتگرین

۳) کادهرین ۴) لامینین

۵۱- **مناطق متمرکز از اسفنگولیپیدها و کلسترول که نسبت به غشای سیال اطراف خود ژله‌ای و منظم‌تر هستند، کدام است؟**

۱) جزایر لیپیدی ۲) دولایه‌های متراکم

۳) حوزه‌های لیپیدی ۴) رفت‌های لیپیدی

۵۲- **کدام مورد درخصوص اتصال سلول به ماتریس (Cell ـ to ـ Matrix) به‌ترتیب درست نیست؟**

۱) اینتگرین، آلفا اکتینین، اکتین فیلامان ۲) اینتگرین، BP180، فیلامان حد واسط

۳) اینتگرین، تالین، وین کولین، اکتین فیلامان ۴) اینتگرین، پلکتین / BP230، فیلامان حد واسط

۵۳- **در ارتباط با عوامل تنظیمی دخیل در فرایند ترجمه در یوکاریوت‌ها، کدام موارد درست است؟**

a: کمپلکس CBC به‌عنوان یک کمپلکس پیش‌گام قبل از eIF4F در سیتوزول به کلاهک mRNA متصل می‌شود.

b: کمپلکس CBC از طریق جذب فاکتور TREX، در انتقال mRNPs از طریق انتهای ′۵ به سیتوزول نقش دارد.

c: فاکتور eIF4F به‌عنوان پروتئین داربست (اسکفولد) در برقراری ارتباط بین کلاهک و دم پلی A طی فرایند ترجمه نقش دارد.

d: در انسان پروتئین Pab1P از طریق اتصال دم پلی A به پروتیئن داربست، در انجام فرایند ترجمه نقش دارد.

e: فاکتور TREX از طریق جذب کمپلکس CBC، در انتقال mRNPs از طریق انتهای ′۳ به سیتوزول نقش دارد.

۱) b ۲) a , c

۳) c , d , e ۴) a , b , c , d

۵۴- **کدام مورد آنزیم APC/C^{cdh1} را برای تجزیه‌شدن مورد هدف قرار می‌دهد؟**

۱) CDK4 و CDK6 ۲) سایکلین A و B

۳) سایکلین D ۴) CDK2

۵۵- **اگر در یک سلول، «Pasha»، غیرفعال شود، چه اتفاقی صورت می‌گیرد؟**

۱) Ribosome recycling متوقف می‌شود. ۲) ویرایش piRNAs سریع‌تر می‌شود.

۳) خاتمه رونویسی snRNAs مختل می‌شود. ۴) پردازش اولیه miRNAs متوقف می‌شود.

۵۶- **کدام غشا به‌دلیل وجود فسفاتیدیل کولین‌های بیشتر، ضخیم‌تر از غشای پلاسمایی است؟**

۱) شبکه آندوپلاسمی ۲) کلروپلاست

۳) لیزوزوم ۴) میتوکندری

۵۷- **کدام کمپلکس در یوکاریوت‌ها نقش مشابه Dna C در باکتری‌ها را در بارگذاری هلیکاز ایفا می‌کند؟**

۱) cdc6 ـ cdt1 ۲) MCM10

۳) CdC45 ۴) RPA

۵۸- اگر X مقادیر $x_1, x_2, ..., x_k$ با $P(X = x_i) = P_i$ ، $i = 1, 2, ..., k$ فرض شود، $var(X)$ کدام است؟

۱) $\sum_{i=1}^{k} x_i P_i - \mu^2$

۲) $\sum_{i=1}^{k} x_i P_i^2 - \mu$

۳) $\sum_{i=1}^{k} x_i^2 P_i - \mu^2$

۴) $\sum_{i=1}^{k} x_i P_i - \mu$

۵۹- فرض کنید تاسی پرتاب می‌شود، وقتی‌که ۶ می‌آید آن را موفقیت نامیده و با S نشان می‌دهیم و درصورتی‌که یکی از روی‌های دیگر (۱ تا ۵) رخ دهد آن را شکست نامیده و با F نشان می‌دهیم. میانگین و واریانس تعداد موفقیت در پرتاب تاس به‌ترتیب از راست به چپ کدام است؟

۱) $\frac{1}{6}$ و $\frac{5}{36}$

۲) $\frac{5}{6}$ و $\frac{5}{36}$

۳) $\frac{1}{6}$ و $\frac{1}{6}$

۴) $\frac{1}{36}$ و $\frac{5}{36}$

۶۰- وقتی‌که دو سکه متعادل یکی پس از دیگری آزمایش شود، احتمال به‌دست آوردن دستِ‌کم (حداقل) یک شیر، کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{3}{4}$

۶۱- از ۱۴۴ بلیت که به‌ترتیب از ۱ تا ۱۴۴ شماره‌گذاری شده‌اند، یکی به‌طور تصادفی کشیده می‌شود. احتمال به‌دست آوردن شماره‌ای که مضربی از ۶ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{8}$

۲) $\frac{1}{6}$

۳) $\frac{1}{16}$

۴) $\frac{1}{48}$

۶۲- اگر X دارای توزیع نرمال باشد، احتمال اینکه X یک انحراف‌معیار در طرفین میانگین بیفتد یا $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)$، چقدر است؟

۱) ۱

۲) ۰/۹۹۷

۳) ۰/۶۸۳

۴) ۰/۹۵۶

۶۳- کمیت $\frac{kS^2}{\sigma^2}$ درصورتی‌که $k = n - 1$ باشد، کدام عدد ویژه را نشان می‌دهد؟

۱) χ^2_k ۲) t_k

۳) t'_k ۴) $F(k, k)$

۶۴- رابطه $\beta - 1$ که در آن β احتمال اشتباه نوع دوم است، چه نامیده می‌شود؟

۱) ناحیه بحرانی دوطرفه ۲) اعتبار آزمون

۳) اندازه آزمون ۴) ناحیه بحرانی یک‌طرفه

۶۵- برای آزمون $H_0: \mu_1 = \mu_2$ در مقابل $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$، درصورتی‌که اندازه‌های نمونه‌ها بزرگ باشند از کدام رابطه استفاده می‌شود؟

۱) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ۲) $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$

۳) $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$ ۴) $z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

۶۶- در ظرفی ۳ مهره سفید و ۶ مهره سیاه وجود دارد. دو بازیکن A و B به نوبت و با جایگذاری به‌طور تصادفی از جعبه مهره انتخاب می‌کنند. A بازی را شروع می‌کند و اولین بازیکنی که مهره سفید استخراج کند برنده است. احتمال اینکه A برنده شود، چقدر است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{5}$

۴) $\frac{2}{5}$

۶۷- یک ظرف شامل n توپ قرمز و m توپ سفید است. توپ‌ها به تصادف و بدون جایگذاری از ظرف انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه برای رسیدن به r توپ قرمز، k انتخاب لازم باشد کدام است؟

۱) $\frac{k}{n+m}$ ۲) $\frac{n}{k} \times \frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}}$

۳) $\frac{\binom{n}{r}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}}$ ۴) $\frac{\binom{n-1}{r-1}\binom{m}{k-r}}{\binom{n+m}{k}}$

۶۸- دو ظرف شماره (۱) و (۲) به‌ترتیب دارای ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز در مقابل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی هستند. از ظرف شماره (۱) دو مهره به تصادف انتخاب کرده و به ظرف شماره (۲) منتقل می‌کنیم. سپس دو مهره به تصادف از ظرف شماره (۲) انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه لااقل یک مهره قرمز از ظرف (۲) انتخاب شود، کدام است؟

۱) $\frac{۵۵۵}{۳۶\times۲۱}$ ۲) $\frac{۱۴۱}{۳۶\times۲۱}$

۳) $\frac{۲۰۱}{۳۶\times۲۱}$ ۴) $\frac{۳۴۲}{۳۶\times۲۱}$

۶۹- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ $n! = O(n^n)$

ب ـ $۲^n = O(n!)$

ج ـ $\sum_{i=۱}^{n} i\log i = \theta(n^۲\log n)$

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) صفر

۷۰- چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ $\log(n!) = \theta(n\log n)$

ب ـ اگر $a > ۱$ و $f(n) = \theta(\log_a^n)$ آنگاه $f(n) = \theta(\ln n)$

ج ـ $۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n} = \theta(\log n)$

د ـ $\sum_{i=۱}^{n} i^k = \theta(n^{k+۱})$ ، k عددی طبیعی است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۷۱- فرض کنید $T(n)$ تعداد دفعاتی باشد که دستور $x++$ در مجموعه دستورات زیر اجرا می‌شود. در این صورت کدام مورد درست است؟

```
j = n ;
while (j >= ۱)
{
    for (i = ۱; i <= j; i++)
        x++;
    j = j/۲;
 }
```

۱) $T(n) = \theta(n)$

۲) $T(n) = \theta(n\log n)$

۳) $T(n) = \theta(\log n)$

۴) $T(n) = \theta(n^۲\log n)$

۷۲- فرض کنید می‌خواهیم چند جمله‌ای $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$ را در نقطه x_0 ارزیابی کنیم. یک الگوریتم تقسیم و غلبه به‌صورت زیر داریم:

ـ اگر $n=1$، مقدار a_0 را برگردان.

ـ اگر $n>1$، چند جمله‌ای را به دو قسمت مساوی تقسیم کن:

$$P(x)=P_{low}(x)+x^{\frac{n}{2}}\cdot P_{high}(x)$$

که در آن:

$$P_{low}(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{\frac{n}{2}-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$

$$P_{high}(x)=a_{\frac{n}{2}}+a_{\frac{n}{2}+1}x+\cdots+a_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}$$

سپس به‌طور بازگشتی $P_{low}(x_0)$ و $P_{high}(x_0)$ را محاسبه کرده و در نهایت

$$P(x_0)=P_{low}(x_0)+(x_0)^{\frac{n}{2}}.P_{high}(x_0)$$

را برگردان.

اگر $k\in\mathbb{Z}$ و $n=2^k$ و هزینه محاسبه $(x_0)^{\frac{n}{2}}$ را نیز درنظر بگیریم، تعداد جمع‌ها و ضرب‌های این الگوریتم در بدترین حالت چقدر است؟

۱) $n-1$ ضرب و $n-1$ جمع

۲) $\frac{n}{2}\log_2 n$ ضرب و $n-1$ جمع

۳) $\frac{3n}{2}-2$ ضرب و $n-1$ جمع

۴) $2n-1$ ضرب و n جمع

۷۳- یک آرایه $A[1\cdots n]$ از اعداد صحیح داریم که برای همه $1\le i<n$ داریم:

$$|A[i]-A[i+1]|\le 1$$

همچنین $A[1]=x$ و $A[n]=y$ و $x<y$.

می‌خواهیم یک الگوریتم جست‌وجو طراحی کنیم که یک مقدار z با $x<z<y$ را در آرایه پیدا کند (یعنی اندیس j به‌طوری که $A[j]=z$). حداکثر تعداد مقایسه‌ها برای یافتن z با استفاده از یک روش بهینه کدام است؟ (فرض کنید این z حتماً وجود دارد.)

۱) $O(y-x)$

۲) $O(\log n)$

۳) $O(n)$

۴) $O(\sqrt{n})$

۷۴- **می‌خواهیم k امین کوچک‌ترین عنصر را در یک دنباله از داده‌ها که به‌صورت برخط (online) و یکی یکی دریافت می‌شوند، پیدا کنیم. توجه کنید که:**

ـ مقدار k از قبل معلوم است.

ـ n (تعداد کل عناصر) تا پایان داده‌ها معلوم نیست.

ـ حافظه‌ی مجاز $O(k)$ سلول حافظه.

ـ زمان مورد انتظار $O(n)$.

یک روش پیشنهادی به‌صورت زیر عمل می‌کند:

الف ـ یک آرایه A با ظرفیت $c \cdot k$ (مثلاً $c = ۲$) در نظر بگیرید.

ب ـ تا وقتی که آرایه پر نشده، عناصر ورودی را در آن ذخیره کن.

ج ـ وقتی آرایه پر شد (مثلاً $۲k$ عنصر)، با استفاده از الگوریتم انتخاب (Quick Select) یا میانه میانه‌ها (Median Medians)، k امین کوچک‌ترین عنصر را در این آرایه پیدا کن و فقط k عنصر کوچک‌تر را در آرایه نگهدار و بقیه را دور بریز.

د ـ این روند را برای عناصر بعدی ادامه بده: هر عنصر جدید را اگر از بزرگ‌ترین عنصر در آرایه کوچک‌تر است، جایگزین آن کن و دوباره k امین کوچک‌ترین را در آرایه بروز کن.

هـ ـ در پایان، k امین عنصر در آرایه نهایی، k امین کوچک‌ترین در دنباله است.

کدام عبارت درباره این الگوریتم نادرست است؟

۱) در هر مرحله، اندازه آرایه $O(k)$ باقی می‌ماند.

۲) پیچیدگی زمانی مورد انتظار کل الگوریتم $O(n)$ است.

۳) این الگوریتم حتی اگر $k = O(\log n)$ باشد، هم‌چنان $O(n)$ زمان می‌برد.

۴) الگوریتم می‌تواند بدون استفاده از هیچ‌گونه روش تصادفی‌سازی (randomization)، در زمان قطعی $O(n)$ اجرا شود.

۷۵- **فرض کنید که شما در حال طراحی یک الگوریتم برای حل‌مسئله تقسیم کارگران به پروژه‌ها هستید. در این مسئله، شما تعدادی پروژه و تعدادی کارگر دارید که هر کارگر می‌تواند در چند پروژه فعالیت کند، اما محدودیت‌هایی در این زمینه وجود دارد: هر کارگر یک ظرفیت محدود دارد (یعنی می‌تواند در تعداد محدودی پروژه فعالیت کند) و هر پروژه نیز باید حداقل تعداد خاصی از کارگران را داشته باشد. هدف شما این است که تعداد کارگران را به حداقل برسانید، با این حال هر کارگر باید برای پروژه‌ها به‌طور کامل اختصاص یابد و هیچ پروژه‌ای نباید بدون کارگر بماند.**

در این شرایط، یک روش حریصانه برای انتصاب کارگران به پروژه‌ها که حتماً یک جواب تولید می‌کند، کدام است؟

۱) انتخاب کارگری که بیشترین تعداد پروژه را می‌تواند پوشش دهد و تخصیص او به پروژه‌هایی با کمترین نیاز به کارگر.

۲) انتخاب کارگری که برای پروژه‌های جدید کمترین زمان را نیاز دارد و تخصیص او به پروژه‌هایی که زمان شروع کمتری دارند.

۳) انتخاب کارگری که کمترین هزینه (مانند حقوق یا هزینه فعالیت) دارد و تخصیص او به پروژه‌هایی که بیشترین ارزش را دارند.

۴) انتخاب کارگری که کمترین ظرفیت اشغال‌شده را دارد، یعنی کارگری که در حال حاضر کمترین تعداد پروژه را دارد، و تخصیص او به پروژه‌هایی که بیشترین نیاز به کارگر دارند.

۷۶- **در مسئله کوله‌پشتی، هدف انتخاب اشیاء با بیشترین مجموع ارزش و قرار دادن آن‌ها در یک کیف است به طوری که کیف ظرفیت وزنی محدودی دارد و هر شئ ارزش و وزن خود را دارد. الگوریتم حریصانه اگر نسبت ارزش به وزن برای یک شئ از شئ دیگر بیشتر باشد به آن اولویت بیشتری می‌دهد. بهترین دلیل برای اینکه الگوریتم حریصانه در همه موارد بهینه نخواهد بود، کدام گزینه است؟**

۱) انتخاب شئ با نسبت ارزش به وزن بیشتر ممکن است فضای زیادی از کیف را اشغال کند، که در مراحل بعدی به انتخاب‌های بدتری منتهی می‌شود.

۲) این الگوریتم به‌صورت فرا ابتکاری عمل می‌کند و لذا لزوماً جواب بهینه را نمی‌دهد.

۳) انتخاب شئ با نسبت بالاتر همیشه بهترین انتخاب است.

۴) این الگوریتم زمانی بهینه است که تمام اشیاء از ارزش مشابهی برخوردار باشند.

۷۷- **n داده را در k هرم به‌طور مساوی تقسیم کرده‌ایم. هرم جدیدی طراحی می‌کنیم که از ساختمان این k هرم استفاده نماید. در این هرم عملیات Enqueue و Dequeue باید یک عنصر به یکی از این هرم‌ها اضافه نماید و همچنین یک عنصر (عنصر بیشینه) را return نماید. مرتبه زمانی عملیات Enqueue و Dequeue هرم جدید چقدر است؟**

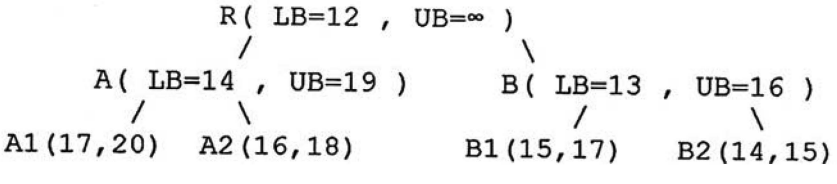
۱) $O(k \times \log \frac{n}{k})$

۲) $O(k + \log \frac{n}{k})$

۳) $O(\log(k + \frac{n}{k}))$

۴) $O(\log k + \log \frac{n}{k})$

۷۸- **یک مسئله مینیمم‌سازی داریم و درخت جست‌وجوی زیر تا این مرحله ساخته شده است:**



در این لحظه، یک قید جدید به مسئله اضافه می‌شود که باعث می‌شود همه گره‌هایی که $cost < ۱۵$ دارند، نامعتبر شوند. (یعنی گره‌هایی با LB یا UB کمتر از ۱۵ دیگر قابل استفاده نیستند.)

اگر در این لحظه بهترین جواب ممکن $f^* = ۱۸$ باشد،

کدام گزینه به‌درستی نشان می‌دهد که کدام گره‌ها حذف (prune) می‌شوند و کدام گره بعدی برای انبساط انتخاب خواهد شد؟ (با فرض روش Best-First Search)

۱) حذف B۲ ـ انبساط بعدی A۲

۲) حذف A۲, B۲ ـ انبساط بعدی B۱

۳) حذف A۱ , B۲ ـ انبساط بعدی B۱

۴) حذف A۲, B۱, B۲ ـ انبساط بعدی A۱

۷۹- در مسئله **Subset Sum Problem**، شما یک مجموعه از اعداد دارید و می‌خواهید تعیین کنید که آیا زیرمجموعه‌ای از این اعداد وجود دارد که مجموع آن‌ها برابر یک عدد هدف مشخص باشد. شما از الگوریتم بازگشت به عقب برای حل این مسئله استفاده می‌کنید. چند تا از گزاره‌های زیر درست است؟

الف ـ الگوریتم بازگشت به عقب به دلیل جست‌وجوی همه حالت‌ها پیچیدگی زمانی $O(۲^n)$ دارد.

ب ـ در این مسئله، الگوریتم بازگشت به عقب به‌طور تصادفی ترکیب‌های مختلف اعداد را بررسی می‌کند.

ج ـ الگوریتم بازگشت به عقب برای این مسئله به جواب درست می‌رسد.

د ـ الگوریتم بازگشت به عقب بررسی می‌کند که برای هر عدد در مجموعه، دو انتخاب وجود دارد، یا آن عدد را شامل کنیم یا آن را نادیده بگیریم.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸۰- یک فایل متنی از ۲۵۶ نوع حرف ۸ بیتی تشکیل شده است. فرض کنید بیشترین تعداد دفعات تکرار یک حرف در این فایل M و کمترین تعداد دفعات تکرار یک حرف m است. با این تعریف، فرض کنید $M < ۲m$. اگر اندازه فایل فشرده شده با الگوریتم هافمن را S_H و اندازه فایل اصلی را S_o بنامیم. کدام گزینه همواره درست است؟

۱) $S_H = S_o$

۲) $S_H < S_o$

۳) $S_H > S_o$

۴) هیچ‌کدام

۸۱- دستور $x++$ در قطعه کد زیر چندبار اجرا می‌شود؟

```
for(i1 = 1 ; i1 <= n ; i1++)
    for(i2 = 1 ; i2 <= min(i1 , n-1) ; i2++)
        for(i3 = 1 ; i3 <= min(i2 , n-2) ; i3++)
⋮
  for(in-1 = 1 ; in-1 <= min(in-2 , 2) ; in-1++)
 for(in = 1 ; in <= 1 ; in++)
        x++ ;
```

۱) n^n

۲) $\frac{1}{n+1}\binom{2n-1}{2}$

۳) $\frac{1}{n+1}\binom{n}{2}$

۴) C_n بار که در آن C_n، n امین عدد کاتالان است.

۸۲- چند نفر دیسک‌های فشرده سفارش می‌دهند. نام آن‌ها و کد سفارش آن‌ها در یک صفحه گسترده وارد می‌شود. رکوردها به‌صورت الفبایی مرتب می‌شوند اما خطا وقتی اتفاق می‌افتد که نام (Name) مرتب شود ولی کد سفارش‌ها (order code) بدون تغییر بماند و در نتیجه هیچ‌یک، تعداد دیسک درست را دریافت نکنند. اگر D_n تعداد راه‌هایی باشد که n نفر می‌توانند تمام سفارش‌های اشتباه را دریافت کنند، D_n کدام است؟

۱) $D_n = (n-1)D_{n-1} + n$

۲) $D_n = (n-1)D_{n-1} + D_{n-2}$

۳) $D_n = (n-1)\left(D_{n-1} + D_{n-2}\right)$

۴) $D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-2)D_{n-2}$

۸۳- فرض کنید زمان اجرای یک الگوریتم به‌صورت بازگشتی $\begin{cases} T(n) = ۲T(n-۱) + T(n-۲) , n \geq ۲ \\ T(۱) = ۳ , T(۰) = ۱ \end{cases}$ داده شده باشد. اگر $G(x)$ تابع مواد دنباله $T(n)$ باشد یعنی $G(x) = \sum_{n=۰}^{+\infty} T(n)x^n$ آنگاه ضریب x^n در بسط $G(x)$ کدام است؟

۱) $۲^{n+۱} - (-۱)^n$

۲) $۲^n + n^۲$

۳) $۲^n + n.۲^{n-۱}$

۴) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\left((۱+\sqrt{۲})^{n+۱} - (۱-\sqrt{۲})^{n+۱}\right)$

۸۴- کدی در مبنای ۱۰ به طول n زمانی معتبر است که تعداد صفرهای ظاهرشده در آن زوج باشد. کدام رابطه بازگشتی تعداد کل کدهای معتبر به طول n را محاسبه می‌کند؟

۱) $a_n = ۱۰ a_{n-۱} - a_{n-۲}$

۲) $a_n = ۹ a_{n-۱} + a_{n-۲}$

۳) $a_n = ۹ a_{n-۱} + ۱۰^{n-۱}$

۴) $a_n = ۸ a_{n-۱} + ۱۰^{n-۱}$

۸۵- حاصل‌جمع $\sum_{K=۰}^{n} ۲^{n-K}(-۱)^K \binom{n}{K}$ برابر با کدام است؟

۱) صفر

۲) n

۳) ۱

۴) $\binom{n}{۲}$

۸۶- فرض کنید G گرافی ساده با دنباله درجات رئوس $d_۱ , d_۲ , \ldots , d_n$ باشد. دراین‌صورت تعداد مسیرهایی به طول ۲ در این گراف برابر با کدام است؟

۱) $\binom{\sum_{i=۱}^{n} d_i}{۲}$

۲) $\sum_{i=۱}^{n} \binom{d_i}{۲}$

۳) $\frac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n} d_i$

۸۷- چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف ـ هر درخت، گرافی مسطح است.

ب ـ هر درخت، گرافی دوبخشی است.

ج ـ اگر یک درخت دودویی با ارتفاع h دارای $n \geq ۱$ رأس باشد آنگاه $\log n < h + ۱$.

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) صفر

۸۸- چند مورد از گزاره‌های زیر درست هستند؟

الف ـ اگر G گراف همبند بوده و درجه هر رأس آن، زوج باشد آنگاه G دور اویلری دارد.

ب ـ اگر درجه هر رأس گراف G زوج باشد آنگاه G دارای دور اویلری است.

ج ـ اگر K_n گراف کامل مرتبه n باشد آنگاه تعداد مسیرهای ساده در K_n برابر $\lfloor n!e-1 \rfloor$ است که درآن $e = ۲/۷۱۸...$ پایه لگاریتم طبیعی است.

د ـ هر گراف کامل K_n؛ با n رأس، حاوی دور هیملتونی است.

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸۹- تابع مولد برای تعداد راه‌هایی که یک بنگاه تبلیغاتی می‌تواند n دقیقه $(n \in \mathbb{Z}^+)$ زمان تبلیغات خریداری کند به شرط آنکه فاصله‌های زمانی برای پخش آگهی‌های تجارتی به‌صورت ۳۰، ۶۰ یا ۱۲۰ ثانیه باشد کدام است؟

۱) $f(x) = \frac{۱}{۱-x^{۳۰}} . \frac{۱}{۱-x^{۶۰}} \frac{۱}{۱-x^{۱۲۰}}$

۲) $f(x) = \frac{۱+x+x^۲+\cdots}{\left(۱-x^{۶۰}\right)\left(۱-x^۴\right)}$

۳) $f(x) = \left(\frac{۱}{۱-x}\right)^{۳۰} \left(\frac{۱}{۱-x^۲}\right)^{۶۰} \left(\frac{۱}{۱-x^۴}\right)^{۱۲۰}$

۴) $f(x) = \frac{۱}{۱-x} \frac{۱}{۱-x^۲} . \frac{۱}{۱-x^۴}$

۹۰- یک تراشه منطقی ۱۴- پایه دارای چهار دریچه AND است که هریک دو ورودی و یک خروجی دارد. نخستین دریچه AND (دریچه مربوط به پایه‌های ۱، ۲ و ۳) ممکن است یک یا چند تا از عیب‌های زیر را داشته باشند:

$D_۱$: نخستین ورودی (پایه ۱) در صفر گیر کرده است.

$D_۲$: دومین ورودی (پایه ۲) در صفر گیر کرده است.

$D_۳$: خروجی (پایه ۳) در ۱ گیر کرده است.

به‌ازای نمونه‌ای مرکب از ۱۰۰ تا از این تراشه‌های منطقی فرض کنید A، B و C زیرمجموعه‌هایی باشند که به‌ترتیب عیب $D_۱$، $D_۲$ و $D_۳$ را دارند. با فرض $|A| = ۲۳$ و $|B| = ۲۶$، $|C| = ۳۰$ و $|A \cap B| = ۷$، $|A \cap C| = ۸$، $|B \cap C| = ۱۰$ و $|A \cap B \cap C| = ۳$ در چند تا از این تراشه‌ها نخستین دریچه AND معیوب است؟

۱) ۵۷

۲) ۵۴

۳) ۴۳

۴) ۲۳