

107F

نام :

نام خانوادگی :

محل امضاء :

صبح جمعه

۹۲/۱۲/۱۶

دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.

امام خمینی (ره)

**آزمون ورودی**  
**دوره‌های دکتری (نیمه متمرکز) داخل**  
**سال ۱۳۹۳**

**آمار**  
**(کلیه گرایش‌ها) (کد ۲۲۳۲)**

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (آنالیز ریاضی ۱- ریاضی عمومی ۱- احتمال و کاربرد آن - آمار ریاضی ۱ «بدون مبحث برآوردیابی» - استنباط آماری ۱)	۴۵	۱	۴۵

اسفندماه سال ۱۳۹۲

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نمی‌باشد.

۱- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳)  $\ln(\sqrt{2}+1)$

(۴) موجود نیست.

۲- شعاع همگرایی سری  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{3^k}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{4}{3}$

(۴) ۲

۳- میانگین تابع  $f(x) = (\cos x - x)^2$  روی بازه  $[-\pi, \pi]$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}$

(۲)  $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6}$

(۳)  $\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{3}$

(۴)  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}$

۴- حجم حاصل از دوران سطح محدود به محور  $y$ ها و خط  $y = 2$  و دایره به مرکز  $(2, 0)$  و شعاع ۲ حول محور  $x$ ها کدام است؟

(۱)  $8\frac{\pi}{3}$

(۲)  $10\frac{\pi}{3}$

(۳)  $24\frac{\pi}{3}$

(۴)  $56\frac{\pi}{3}$

۵- حاصل انتگرال  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|)dxdy$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{4}{3}$

(۴)  $\frac{5}{3}$

۶- در فضای متریک  $(X,d)$  کدام گزینه صحیح است؟ ( $E^\circ$  نشان دهنده مجموعه نقاط درونی  $E$  و  $E'$  نشان دهنده مجموعه نقاط حدی  $E$  است.)

(۱) اگر  $E^\circ = \emptyset$  آنگاه  $X \setminus E$  در  $X$  چگال است.

(۲) اگر  $E$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $X \setminus E$  در  $X$  چگال است.

(۳) اگر  $E' = \emptyset$  آنگاه  $X \setminus E$  در  $X$  چگال است.

(۴) هیچ کدام

۷- مقدار  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$  کدام است؟

(۱)  $e$

(۲)  $\frac{e}{2}$

۸- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!)$  کدام است؟

(۱)  $2\pi$

(۲)  $\pi$

(۳) صفر

(۴) حد ندارد.

۹- مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln 2}{2^n} + \frac{\ln 3}{3^n} + \dots + \frac{\ln n}{n^2} \right)$  کدام است؟

(۱)  $e^{-1}$

(۲)  $0$

(۳)  $1$

(۴)  $\infty$

۱۰- فرض کنیم  $(X,d)$  یک فضای متریک همبند و  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $X$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $f$  یک تابع ثابت است.

(۲) اگر  $f(X)$  حداکثر شمارا باشد آنگاه  $f$  یک تابع ثابت است.

(۳) اگر  $X$  فشرده باشد آنگاه  $f(X)$  یک بازه بسته در  $\mathbb{R}$  است.

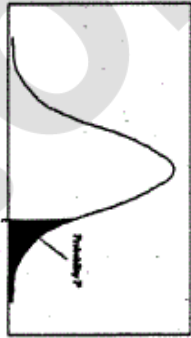
(۴) همه موارد





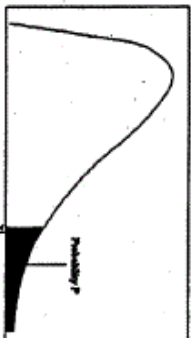
مساحت زیر منحنی نرمال استاندارد

z	0.0	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6704	.6739	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9706	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9934	.9934	.9935
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9978	.9979	.9980	.9981	.9981	.9982
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986	.9987
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9990	.9990	.9991
3.1	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997	.9997	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998



مقادیر بحرانی توزیع z

df	.10	.05	.025	.01	.005
1	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.996	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756



مقادیر بحرانی توزیع مربع کای

df	.995	.990	.975	.950	.900	.800	.700	.600	.500	.400	.300	.200	.100	.050
1	48.5	0.0001	0.0009	0.0039	0.0099	0.0168	0.0244	0.0325	0.0411	0.0501	0.0594	0.0690	0.0788	0.0889
2	0.010	0.0201	0.0506	0.1025	0.1548	0.2032	0.2465	0.2844	0.3168	0.3443	0.3675	0.3863	0.4013	0.4130
3	0.071	0.1148	0.2158	0.3518	0.5118	0.6758	0.8367	0.9943	1.1581	1.3271	1.4998	1.6750	1.8515	2.0281
4	0.206	0.2971	0.4844	0.7107	0.9750	1.2733	1.6001	1.9567	2.3339	2.7317	3.1493	3.5861	4.0413	4.5048
5	0.411	0.5343	0.8312	1.1454	1.5085	1.9133	2.3599	2.8381	3.3379	3.8591	4.3914	4.9347	5.4888	6.0534
6	0.675	0.8720	1.2730	1.6898	2.1673	2.6861	3.2361	3.8071	4.3891	4.9819	5.5854	6.1994	6.8236	7.4577
7	0.989	1.2790	1.8495	2.4398	3.0539	3.6917	4.3521	5.0249	5.7001	6.3765	7.0539	7.7321	8.4110	9.0898
8	1.344	1.6665	2.1797	2.7726	3.3967	4.0421	4.7089	5.3871	6.0665	6.7471	7.4287	8.1111	8.7941	9.4776
9	1.734	2.0879	2.7003	3.3251	3.9729	4.6337	5.3071	5.9919	6.6771	7.3627	8.0487	8.7349	9.4213	10.1079
10	2.155	2.5582	3.2669	3.9403	4.6394	5.3529	6.0707	6.7919	7.5163	8.2439	8.9737	9.7056	10.4395	11.1754
11	2.603	3.0534	3.8157	4.5748	5.3581	6.1554	6.9565	7.7604	8.5671	9.3764	10.1881	11.0011	11.8153	12.6306
12	3.075	3.5705	4.1069	4.9087	5.7320	6.5681	7.4069	8.2484	9.0924	9.9387	10.7869	11.6368	12.4883	13.3412
13	3.565	4.1069	4.8287	5.6706	6.5228	7.3851	8.2484	9.1124	9.9781	10.8454	11.7141	12.5841	13.4554	14.3281
14	4.074	4.6604	5.5287	6.3906	7.2621	8.1339	9.0061	9.8794	10.7539	11.6294	12.5059	13.3834	14.2618	15.1411
15	4.600	5.2293	6.2621	7.1269	8.0007	8.8744	9.7481	10.6219	11.4956	12.3694	13.2431	14.1168	14.9904	15.8641
16	5.142	5.8122	6.9076	7.7816	8.6554	9.5291	10.4028	11.2765	12.1502	13.0239	13.8976	14.7713	15.6450	16.5187
17	5.697	6.4077	7.5641	8.4377	9.3114	10.1851	11.0588	11.9325	12.8062	13.6799	14.5536	15.4273	16.3010	17.1747
18	6.264	7.0149	8.2307	9.1043	9.9780	10.8517	11.7254	12.5991	13.4728	14.3465	15.2202	16.0939	16.9676	17.8413
19	6.843	7.6327	8.9065	9.7802	10.6539	11.5276	12.4013	13.2750	14.1487	15.0224	15.8961	16.7698	17.6435	18.5172
20	7.433	8.2604	9.5907	10.4644	11.3421	12.2168	13.0905	13.9642	14.8379	15.7116	16.5853	17.4590	18.3327	19.2064
21	8.033	8.8972	10.282	11.191	12.0117	12.8264	13.6901	14.5538	15.4275	16.3012	17.1749	18.0486	18.9223	19.7960
22	8.642	9.5424	10.982	11.882	12.702	13.5117	14.3754	15.2391	16.1028	16.9665	17.8302	18.6939	19.5576	20.4213
23	9.260	10.195	11.688	12.573	13.407	14.2261	15.0898	15.9435	16.7972	17.6509	18.5046	19.3583	20.2120	21.0657
24	9.886	10.856	12.401	13.384	14.181	15.031	15.892	16.7457	17.5994	18.4531	19.3068	20.1601	21.0084	21.8584
25	10.52	11.523	13.119	14.161	15.062	15.923	16.776	17.628	18.4813	19.335	20.189	21.027	21.877	22.727
26	11.16	12.198	13.843	15.139	16.151	17.013	17.846	18.679	19.512	20.381	21.248	22.116	22.946	23.604
27	11.80	12.878	14.573	16.151	17.279	18.064	18.897	19.730	20.599	21.460	22.327	23.156	23.985	24.643
28	12.46	13.564	15.307	17.208	18.427	19.335	20.164	21.000	21.829	22.658	23.487	24.314	25.142	25.800
29	13.12	14.256	16.047	17.708	18.927	19.835	20.664	21.492	22.321	23.149	23.976	24.803	25.631	26.268
30	13.78	14.953	16.790	18.492	19.487	20.487	21.317	22.147	22.976	23.803	24.630	25.457	26.284	26.914

۱۱- ذره‌ای واقع بر مبدأ با احتمال  $p$  و  $q = 1 - p$  روی محور  $x$ ها به ترتیب یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت چپ حرکت می‌کند. احتمال این که ذره پس از  $2k$  حرکت ( $k > 5$ )،  $10$  واحد از مبدأ دور شده باشد کدام است؟

$$(1) \binom{2k}{k+5} p^{k+5} q^{k-5}$$

$$(2) \binom{2k}{k+5} p^{k-5} q^{k+5}$$

$$(3) \binom{2k}{k+5} p^k q^k (p^{10} + q^{10})$$

$$(4) \binom{2k}{k+5} p^{k-5} q^{k-5} (p^{10} + q^{10})$$

۱۲- فرض کنید  $A_n = \{n\}_1^\infty$  دنباله‌ای از پیشامدهای مستقل و با احتمال

$$P(A_n) = \frac{1}{n+1}$$

باشد، مقدار  $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n)$  کدام است؟

$$(1) e^{-1}$$

$$(2) 1 - e^{-1}$$

$$(3) 0$$

$$(4) 1$$

۱۳- فرض کنید  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  یک فضای نمونه و  $F = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

یک  $\sigma$ -میدان تعریف شده بر روی  $\Omega$  باشد. اگر  $(\Omega, F, P)$  یک فضای

احتمال باشد، کدام یک از توابع زیر یک متغیر تصادفی نیست؟

$$(1) X(i) = i$$

$$(2) X(i) = 2$$

$$(3) X(1) = X(2) = 10; X(3) = X(4) = 5$$

$$(4) X(1) = X(2) = X(3) = X(4) = 5$$

۱۴- طول یک مسیر چند بار اندازه‌گیری شده و میانگین اندازه‌ها ثبت می‌شود تا دقت

اندازه‌گیری افزایش یابد. در هر بار اندازه‌گیری خطایی تصادفی به اندازه  $\varepsilon$  رخ

می‌دهد که دارای میانگین صفر و انحراف معیار ۲ است. اگر این مسیر را ۳۶ بار

اندازه‌گیری کنیم، احتمال تقریبی اینکه میانگین اندازه‌ها کمتر از  $0.6$  واحد از

طول واقعی مسیر اختلاف داشته باشد، کدام است؟

$$(1) 0.9228$$

$$(2) 0.9282$$

$$(3) 0.95$$

$$(4) 0.975$$

۱۵- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با  $P[X \geq 1] = 1$ ، اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E \left[ \frac{1}{X} I \left( X \geq \frac{n+2}{n+1} \right) \right] = b$$

باشد، مقدار  $b$  کدام است؟

(۱)  $b = 0$

(۲)  $0 < b < 1$

(۳)  $b = 1$

(۴)  $b \geq 1$

۱۶- فرض کنید  $0 < x < y < 1$ ،  $f_{X|Y=y}(x) = \frac{1}{y}$ ، توزیع  $Y$  به شرط  $X = x$   $f_Y(y) = 2y$

کدام است؟

(۱)  $u(x, 1)$

(۲)  $\text{Beta}(1, x)$

(۳)  $u(1, x+1)$

(۴)  $\text{Beta}(1, x+1)$

۱۷- فرض کنید  $X \sim N(0, 1)$  و  $Z$  مستقل از  $X$  دارای تابع احتمال زیر باشد،

$$P[Z = 1] = 1 - P[z = -1] = p, \quad (0 < p \leq \frac{1}{2})$$

اگر  $Y = XZ$ ، مقدار

$P(X + Y \neq 0)$  کدام است؟

(۱)  $1 - p$

(۲)  $1 - 2p$

(۳)  $p$

(۴)  $2p$

۱۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع  $N(0, 1)$  باشند و

تعریف کنید:

$$W = \begin{cases} X, & XY > 0 \\ -X, & XY < 0 \end{cases}$$

توزیع  $W$  کدام است؟

(۱) نمایی

(۲)  $N(0, 1)$

(۳) برنولی

(۴) دو جمله‌ای

۱۹- فرض کنید  $X_1, X_2, X_3$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x=0 \\ \frac{2}{3} & x=1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

تابع مولد گشتاور  $Y = X_1 X_2 X_3$  کدام است؟

(۱)  $1 + 2e^t$

(۲)  $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{2t}$

(۳)  $\frac{19}{27} + \frac{8}{27}e^t$

(۴)  $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t)^3$

۲۰- فرض کنید  $Z_1, Z_2, \dots$  یک دنباله از آزمایش‌های مستقل برنولی با پارامتر  $p$

باشند و  $X_1, X_2, \dots$  به ترتیب زمان اولین، دومین و ... موفقیت باشند. تابع

احتمال توأم  $P(X_1 = k_1, \dots, X_n = k_n)$  کدام است؟

(۱)  $p^{\sum k_i - n} (1-p)^n$

(۲)  $p^n (1-p)^{\sum k_i - n}$

(۳)  $p^{k_n - n} (1-p)^n$

(۴)  $(1-p)^{k_n - n} p^n$

۲۱- فرض کنید  $Y | X \sim N(-\frac{X^2}{2}, \theta X^2)$  و  $X \sim \text{Exp}(1)$ ، مقدار  $\text{Var}(Y)$

کدام است؟

(۱)  $2\theta$

(۲)  $2\theta + 5$

(۳)  $4\theta + 1$

(۴)  $\frac{\theta + 1}{2}$

۲۲- اگر  $X_1, X_2$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند، تابع مولد گشتاور

$Y = X_1 X_2$  کدام است؟

(۱)  $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}; -1 < t < 1$

(۲)  $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

(۳)  $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}; -1 < t < 1$

(۴)  $(1-2t)^{-2}; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$

۲۳- فرض کنید ضریب همبستگی بین  $X$  و  $Y$  برابر  $\rho$  باشد، در این صورت یک کران بالا برای  $E(\text{Var}(Y|X))$  کدام است؟

(۱)  $\rho^2 \text{Var}(X)$

(۲)  $\rho^2 \text{Var}(Y)$

(۳)  $(1-\rho^2) \text{Var}(Y)$

(۴)  $(1-\rho^2) \text{Var}(X)$

۲۴- فرض کنید  $\{X_n\}$  یک دنباله از متغیرهای تصادفی با تابع احتمال زیر باشد،

توزیع حدی  $\frac{X_n}{n}$  کدام است؟

$$P(X_n = k) = \left(\frac{\lambda}{n+\lambda}\right) \left(\frac{n}{n+\lambda}\right)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

(۱) نمایی با میانگین  $\lambda$

(۲) نمایی با میانگین  $\frac{1}{\lambda}$

(۳) نمایی با میانگین  $2\lambda$

(۴) نمایی با میانگین  $\frac{2}{\lambda}$

۲۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر  $\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}$  و  $Y_1, \dots, Y_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع هندسی با پارامتر  $\theta_1 + \theta_2$  باشند،

اگر دو نمونه از یکدیگر مستقل باشند، توزیع حدی  $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$  کدام است؟

(۱)  $N(\theta_1, \theta_1 \theta_2)$

(۲)  $N(\theta_2, \theta_1 \theta_2)$

(۳)  $N\left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \theta_1 \theta_2\right)$

(۴)  $N\left(\frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2}, \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2}\right)$



۲۶- فرض کنید  $X$  دارای تابع احتمال زیر است:

$$P_{\theta}(X = -1) = \theta, P_{\theta}(X = x) = (1 - \theta)^2 \theta^x, x = 0, 1, 2, \dots; \theta \in \left[\frac{1}{3}, 1\right)$$

در صورت مشاهده  $X = 1$ ، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی برای  $1 - \theta$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $\frac{3}{4}$

۲۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع‌نمایی با میانگین  $\theta$  و  $M$

یک مقدار مثبت ثابت باشد، اگر در نمونه مشاهده شود تعداد  $X_i$  های کوچکتر و

مساوی  $M$  برابر  $k$  باشد، برآورد ماکزیمم درست‌نمایی (MLE) پارامتر  $\theta$

بر حسب مشاهدات کدام است؟

(۱)  $\frac{kM}{n}$

(۲)  $\frac{nM}{k}$

(۳)  $\frac{-M}{\ln\left(\frac{k}{n}\right)}$

(۴)  $\frac{-M}{\ln\left(1 - \frac{k}{n}\right)}$

۲۸- شخصی هر روز حداقل  $\theta$  دقیقه و حداکثر ۱۲ دقیقه منتظر تاکسی می‌ماند تا به

محل کار خود برود. در پنج روز گذشته او ۴، ۶، ۱۰، ۷ و ۸ دقیقه منتظر تاکسی

بوده است. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی ( $\hat{\theta}$ ) و گشتاوری ( $\tilde{\theta}$ ) پارامتر  $\theta$

کدام است؟

(۱)  $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (4 \text{ و } 10)$

(۲)  $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (4 \text{ و } 4)$

(۳)  $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (2 \text{ و } 4)$

(۴)  $(\tilde{\theta}, \hat{\theta}) = (2 \text{ و } 10)$

۲۹- فرض کنید  $Y$  دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای  $N$  و  $p_1$  است و  $X$  به شرط

$Y = y$  دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای  $y$  و  $p_2$  است، که در آن  $N$  و  $p_1$

معلوم هستند، آماره بسنده برای  $p_2$  کدام است؟

(۱)  $X$

(۲)  $(X, Y)$

(۳)  $X + p_1 Y$

(۴)  $\left(\frac{X + Y}{2}\right)$

۳۰- فرض کنید توزیع  $X$  متعلق به خانواده زیر باشد. گزینه صحیح کدام است؟

$\theta \backslash X$	-۲	۰	۲
$\theta_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\theta_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

(۱)  $X$  یک آماره کامل است.

(۲)  $X$  یک آماره کامل است ولی بسنده نیست.

(۳)  $|X|$  یک آماره بسنده و کامل است.

(۴)  $|X|$  یک آماره بسنده و کامل نیست.

۳۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه‌ی تصادفی از توزیع  $N(\mu, 1)$  باشد. اگر  $\bar{X}$ ,

$S^2$  و  $\tilde{X}$  به ترتیب میانگین، واریانس و میانه‌ی نمونه‌ای باشند، آنگاه مقدار

$\text{cov}(\bar{X}, \tilde{X})$  و  $E[\bar{X} - S^2 | \bar{X}]$  به ترتیب کدام است؟

(۱)  $\bar{X} - \frac{1}{n}$  و ۰

(۲)  $\bar{X} - 1$  و ۰

(۳)  $\bar{X} - \frac{1}{n}$  و  $\frac{1}{n}$

(۴)  $\bar{X} - 1$  و  $\frac{1}{n}$

۳۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت در فاصله‌ی

$(\theta_1, \theta_2)$  باشد. برآوردگر UMVU برای پارامتر  $\frac{1}{\theta_2 - \theta_1}$  کدام است؟

$$X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

(۱)  $\frac{n-1}{(n-2)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۲)  $\frac{n-2}{(n-1)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۳)  $\frac{n}{(n-2)(X_{(n)} - X_{(1)})}$

(۴)  $\frac{n-2}{n(X_{(n)} - X_{(1)})}$

۳۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\theta, 1)$  باشد، برآوردگر UMVU برای پارامتر  $\alpha = \Phi(c - \theta)$  کدام است؟  $\Phi(\cdot)$  تابع توزیع نرمال استاندارد است.

$$(۱) \Phi(c - \bar{X})$$

$$(۲) \Phi(\sqrt{n}(c - \bar{X}))$$

$$(۳) \Phi\left(\frac{c - \bar{X}}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}}\right)$$

$$(۴) \Phi\left(\frac{c - \bar{X}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}\right)$$

۳۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  ها یک نمونه تصادفی از خانواده توزیع‌های متقارن حول  $\theta$  باشد. در این صورت برآوردگر یکنواخت با کمترین واریانس (UMVUE) برای  $\theta$  کدام است؟

$$X_{1:n} = \text{Min}_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$X_{n:n} = \text{Max}_{1 \leq i \leq n} X_i$$

$$(۱) \bar{X}$$

(۲) میانه

$$(۳) \frac{X_{1:n} + X_{n:n}}{2}$$

(۴) وجود ندارد

۳۵- فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع گسسته زیر با پارامتر  $\theta \in (0, 1)$  است؟ کران پائین کرامر رانو برای واریانس برآوردگر نا اریب برای  $\theta$

	۰	۱	۲	
	$\frac{2-\theta}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	کدام است؟

$$\frac{\theta(2-\theta)}{n} \quad (1)$$

$$\frac{\theta(2-\theta)}{2n} \quad (2)$$

$$\frac{2\theta(2-\theta)}{2n} \quad (3)$$

$$\frac{\theta(1-\theta)}{2n} \quad (4)$$

۳۶- فرض کنید  $X$  دارای توزیع هندسی با میانگین  $\frac{1}{p}$  باشد که  $0 < p < 1$ . برآورد

بیز پارامتر  $p$  تحت تابع زیان  $L(a, p) = \frac{(p-a)^2}{p}$  بازای مقدار مشاهده

$x = 1$  کدام است؟ توزیع پیشین  $p$  را توزیع بتا با پارامترهای  $\alpha, \alpha$  در نظر بگیرید. ( $\alpha > 0$ )

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\frac{\alpha}{2\alpha+1} \quad (2)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\alpha+1} \quad (4)$$



۳۷- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین  $\theta$  و  $\tau = \frac{1}{\theta}$  دارای توزیع  $\text{Gamma}(2, 1)$  باشد. تحت تابع زیان

$$L(\theta, \delta) = \left( \sqrt{\frac{\delta}{\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{\delta}} \right)^2$$

(۱)  $\sqrt{n(n+1)} \bar{x}$  برآوردگر بیز  $\theta$  کدام است؟

(۲)  $\sqrt{\frac{n+1}{n}}(n\bar{x}+1)$

(۳)  $\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n\bar{x}+1)$

(۴)  $\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n\bar{x})$

۳۸- فرض کنید تک مشاهده  $X$  با توزیعی از خانواده زیر در دست است.

$\theta \backslash x$	-۱	۰	۱
۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

با تابع زیان جدول (A) نمایانگر مجموعه عملها است)

$A \backslash \theta$	-۱	۰	۱
-۱	۰	۱	۴
۰	۱	۰	۱
۱	۴	۱	۰

برآورد بیز برای پارامتر  $\theta$  کدام است، اگر توزیع پیشین به صورت

$$\pi(\theta_1) = \pi(\theta_0) = \pi(\theta_2) = \frac{1}{3}$$

(۱)  $\delta(0) = \delta(1) = 0$

(۲)  $\delta(0) = 1, \delta(1) = 0$

(۳)  $\delta(0) = -1, \delta(1) = 0$

(۴)  $\delta(0) = 1, \delta(+1) = 1$

۳۹- فرض کنید  $X|\theta \sim U(0, \theta)$  ,  $\theta \sim \Gamma(2, 1)$  . تحت تابع زیان قدر مطلق خطا، برآوردگر بیز پارامتر  $\theta$  کدام است؟

(۱)  $X + \ln 2$

(۲)  $X - \ln 3$

(۳)  $X - \ln 2$

(۴)  $X + \ln 3$

۴۰- فرض کنید  $X|\theta \sim U(0, \theta)$  ,  $\theta \sim \Gamma(2, \lambda)$  باشد. برآورد ML پارامتر  $\lambda$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{X}$

(۲)  $\frac{2}{X}$

(۳)  $X$

(۴)  $2X$

۴۱- فرض کنید  $X \sim B(n, p)$  و  $Y \sim B(n, 1-p)$  دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. تحت تابع زیان توان دوم خطا برآوردگر مینیماکس  $p$  کدام است؟

(۱)  $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}}$

(۲)  $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}} + \frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{X - Y}{2n + \sqrt{2n}} + 1$

(۴)  $\frac{X - Y}{n + \sqrt{n}} + \frac{1}{4}$

۴۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی از خانواده توزیع های  $F$

باشد. برآوردگر  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  تحت تابع زیان توان دوم خطا در کدام یک از

خانواده های زیر مینیماکس نیست؟

(۱)  $F = \{N(\theta, 1) | \theta > b, \text{ معلوم } b\}$

(۲)  $F = \{N(\theta, 1) | \theta < a, \text{ معلوم } a\}$

(۳)  $F = \{N(\theta, 1) | \theta \in R\}$

(۴)  $F = \{N(\theta, 1) | a \leq \theta \leq b, \text{ معلوم } b, a\}$

۴۳-  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  است که  $\lambda \in (0, M)$  و  $M$  یک عدد ثابت معلوم است. فرض کنید برآوردگرهایی به فرم  $\delta_c(\bar{X}) = c\bar{X}$  مورد توجه باشند. برآوردگر مینیماکس برای  $\lambda$ ، تحت تابع زیان درجه دو، به ازای کدام مقدار  $c$  بدست می آید؟

$$c = M \left( \frac{n}{n+1} \right) \quad (۱)$$

$$c = \left( \frac{nM}{1+nM} \right) \quad (۲)$$

$$c = nM \quad (۳)$$

$$c = \frac{n}{M} \quad (۴)$$

۴۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با میانگین  $\theta$  باشد. تحت تابع زیان توان دوم خطا، کدام یک از برآوردگرهای زیر برای  $\theta$  ناپذیرفتنی (غیر مجاز) است؟

$$\delta(\bar{x}) = \Delta \quad (۱)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}+1}{2} \quad (۲)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}-1}{2} \quad (۳)$$

$$\delta(\bar{x}) = \frac{\bar{x}+2}{2} \quad (۴)$$

۴۵- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(0, \theta)$  باشد. کدام گزینه نادرست است.

$$(۱) \bar{X}^2 \text{ برای } \theta \text{ سازگار است.}$$

$$(۲) \bar{X}^2 \text{ UMVUE برای } \theta \text{ است.}$$

(۳) تحت تابع زیان درجه دوم،  $\bar{X}^2$  برآوردگر روا (مجاز، پذیرفتنی) برای  $\theta$  است.

(۴) تحت تابع زیان درجه دوم، در ردهی برآوردگرهای  $a\bar{X}^2$ ، برآوردگر  $\frac{n}{n+2}\bar{X}^2$

برای  $\theta$ ، دارای کمترین ریسک است.