isipaper.org

270F

270

F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل ـ سال ۱۳۹۶

رشتهٔ امتحانی ریاضی کاربردی (کد ۲۲۳۴)

تعداد سؤال: ۴۵ | مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعهٔ دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی ـ آنالیز ریاضی ـ مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی ـ مبانی آنالیز عددی ـ آنالیز عددی پیشرفته ـ آنالیز حقیقی ـ تحقیق در عملیات پیشرفته ۱)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه ـ سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

isipaper.org

مبانی آنالیز ریاضی ـ آنالیز ریاضی:

۱- اگر $a, b > 1$ ، مقدار $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{\sqrt[n]{a}-1}{b})^n$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{a}{b}$

۳) e^{a-b}

۴) $a^{\frac{1}{b}}$

۲- فرض کنید $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟

۱) باز یا بسته یا همبند بودن $f(S)$، پیوستگی f را نتیجه می‌دهد.

۲) باز یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳) همبند یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۴) باز یا همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳- اگر تابع $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ هر دو موجود هستند.

۲) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیستند.

۳) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin Q \\ \frac{2}{\pi} & x \in Q \end{cases}$ بر $[0, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام گزینه درست است؟

۱) تابع f دارای تابع اولیه است.

۲) تابع f در هیچ نقطه از $[\frac{\pi}{2}, 0]$ پیوسته نیست.

۳) انتگرال بالایی تابع f برابر یک است.

۴) تابع f در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. متریک ρ را روی X به‌صورت $\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

۱) مترهای ρ و d معادل هستند.

۲) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر d همبند باشد.

۳) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر d فشرده باشد.

۴) به ازای هر فضای متریک Y ، تابع $f : X \to Y$ نسبت به متر ρ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر d پیوسته باشد.

isipaper.org

۶- اگر $C[a,b]$ فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a,b]$، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی در $[a,b]$ و ψ_n بر $C[a,b]$ به‌صورت $\psi_n(f)=f(x_n)$ تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\{\psi_n\}$ به‌طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

۱) $\{x_n\}$ همگرا باشد.

۲) $\{x_n\}$ کراندار باشد.

۳) $\{x_n\}$ از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

۴) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید $\{(x_n)\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد. $X=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ مجهز به متر $d\left((a_n)_{n=1}^{\infty},(b_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|$ باشد و $E=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in X \mid \forall n\in\mathbb{N}, x_n\geq 0\}$. کدام گزینه درست است؟

۱) E همبند نیست.

۲) $E^{\circ}=\phi$.

۳) $E'\neq E$.

۴) E بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک X نیست؟

۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر X اکسترمم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

۲) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y پیوسته یکنواخت است.

۳) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

۴) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y کران‌دار است.

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی:

۹- فرض کنید $G=S_6$ و $H=\{e,(13),(16),(36),(136),(163)\}$. قرار می‌دهیم $T=<H>$. تعداد عناصر مرتبهٔ ۲ در T برابر است با:

۱) ۳

۲) ۴

۳) ۵

۴) ۶

isipaper.org

۱۰- فرض کنید G یک گروه است و $g \in G$. در این صورت نگاشت $I_g : G \to G$ که $I_g(x) = gxg^{-1}$ را خودریختی داخلی نظیر g می‌نامیم. فرض کنید a و b دو عضو گروه G باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام‌یک درست است؟

۱) $a = b$

۲) $ab \in Z(G)$

۳) $b = a^{-1}$

۴) $ab = ba$

۱۱- فرض کنید K یک میدان شامل Q بوده و $[K : Q] = n$. اگر $\phi : K \to M_2(Q)$ یک تکریختی (منومورفیسم) حلقه‌ای باشد، n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۱) ۱

۲) ۱ , ۲

۳) ۱ , ۲ , ۴

۴) نامتناهی حالت برای n وجود دارد.

۱۲- فرض کنیم A یک ماتریس ۴×۵ و B یک ماتریس ۵×۴ با درایه‌های از میدان F باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه A برابر ۴ و رتبه B برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟

۱) نه AB وارون‌پذیر است و نه BA.

۲) هم AB وارون پذیر است و هم BA.

۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۱۳- ماتریس $A \in M_3(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^2 + 4A + 3I = 0$ صدق می‌کند. $Tr(A)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند باشد؟

۱) -7

۲) -5

۳) -3

۴) -1

isipaper.org

۱۴- ماتریس $A \in M_5(\mathbb{R})$ در رابطهٔ $A^2 - 4A - I = 0$ صدق می‌کند. اگر $a_1, a_2, \ldots, a_5$ مقدار ویژه‌های A باشند، مقدار $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \ldots + (a_5 - \frac{1}{a_5})$ کدام است؟

۱) ۴

۲) -20

۳) ۲۰

۴) -4

۱۵- ماتریس A یک ماتریس 1395×1395 است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند. این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون‌پذیر است؟

۱) ۴

۲) ۹

۳) ۱۷

۴) ۴۱

۱۶- فرض کنید $A \in M_{5\times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) = 3$ ، $B \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(B) = 2$. در این‌صورت: $\dim(\{X \in M_{4\times 3}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$ برابر است با:

۱) ۲

۲) ۴

۳) ۶

۴) ۸

مبانی آنالیز عددی:

۱۷- فرض کنید $a > 0$ و $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$، برای $n = 0,1,2,\ldots$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) دنبالهٔ $\{x_n\}$ با هر نقطه اولیه $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبهٔ همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

۲) دنبالهٔ $\{x_n\}$ با هر نقطه اولیه $x_0 \in \mathbb{R}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبهٔ همگرایی آن دقیقاً ۱ است.

۳) دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌ازای هر $x_0 < 0$ همگرا به $-\sqrt{a}$ است و مرتبهٔ همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

۴) دنبالهٔ $\{x_n\}$ به‌ازای $-\sqrt{a} \le x_0 \le \sqrt{a}$ همگرا به $\sqrt{a}$ است و مرتبهٔ همگرایی آن دقیقاً ۲ است.

isipaper.org

۱۸- فرض کنید $g(x)=x+\lambda f(x)$، f' بر $[a,b]$ پیوسته و مثبت است و $f(a)f(b)<0$. λ کدام شرایط را داشته باشد تا دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ با x_0 مناسب به یک صفر تابع f همگرا باشد؟

(فرض کنید $M=\max\limits_{a\le x\le b} f'(x)$, $m=\min\limits_{a\le x\le b} f'(x)$.)

۱) $-\frac{2}{M}<\lambda<0$.

۲) $\max\left\{-\frac{2}{m},-\frac{2}{M}\right\}<\lambda<0$.

۳) $-\frac{2}{m}<\lambda<0$.

۴) $\min\left\{-\frac{2}{m},-\frac{2}{M}\right\}<\lambda<0$.

۱۹- فرض کنید x_i، $i=0,1,...,n$، اعداد دو به دو متمایز و $P(x)$ درونیاب چند جمله‌ای از درجه حداکثر n برای $(x_i,f(x_i))$، $i=0,1,...,n$، است. اگر $\sum\limits_{i=0}^{n-1} x_i=1$، ضریب x^{n-1} در $P(x)$ کدام است؟

۱) $f[x_0,...,x_{n-1}]$

۲) $f[x_0,...,x_{n-1}]-f[x_0,...,x_n]$

۳) $f[x_0,...,x_{n-1}]+f[x_0,...,x_n]$

۴) $f[x_0,...,x_n]-f[x_0,...,x_{n-1}]$

۲۰- درجهٔ دقت چند جمله‌ای فرمول انتگرال‌گیری زیر که به فرمول ذوزنقه‌ای میانگینی مشهور است چند است؟

(منظور از درجه دقت، دقیق بودن فرمول برای چند جمله‌ای‌ها با بزرگ‌ترین درجه ممکن است.)

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x)dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-\varepsilon}^1 f(x)dx\right]+E(f)\ ,\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}.$$

۱) ۰

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

isipaper.org

۲۱- فرض کنید $\bar{x}$ جواب دقیق دستگاه $Ax = b$ است، که در آن A وارون‌پذیر است. $\tilde{x}$ را جواب محاسبه شده (تقریبی) برای دستگاه در نظر بگیرید. قرار دهید $r = b - A\tilde{x}$ و $e = \bar{x} - \tilde{x}$ در این صورت داریم:

$$\frac{\|e\|}{\|\bar{x}\|} \leq \ldots$$

۱) $\|A\|\|r\|$

۲) $\frac{\|r\|}{\|A\|}$

۳) $\frac{\|A^{-1}\|\|r\|}{\|A\|\|b\|}$

۴) $\|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r\|}{\|b\|}$

آنالیز عددی پیشرفته:

۲۲- همه گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به‌غیر از:

۱) $\text{cond}_2(I) = 1$ که I ماتریس همانی است، که $\text{cond}_2(\cdot)$ عدد حالت در نرم ۲ است.

۲) $\text{cond}_p(A) \geq 1$ به ازای هر $p \geq 1$، که $\text{cond}_p(\cdot)$ عدد حالت در نرم p است.

۳) اگر A مربعی و متعامد باشد، آنگاه $\text{cond}_\infty(A) = 1$، $\text{cond}_\infty(\cdot)$ عدد حالت در نرم ∞ است.

۴) اگر A مربعی و $\text{cond}_2(A) = 1$، آنگاه A مضربی از یک ماتریس متعامد است.

۲۳- در محاسبه تخمینی برای انتگرال معین $\int_L^U (x-L)^2(x-U)^2 dx$ با روش ذوزنقه‌ای مرکب روی $n > 1$ زیر بازهٔ مساوی با طول هر زیر بازه برابر با $h = \frac{U-L}{n}$، خطای برشی از کدام مرتبه است؟

۱) h^5

۲) h^4

۳) h^3

۴) h^2

isipaper.org

۲۴- برای قاعده نقطه میانی $\int_{0}^{h} f(x)dx = hf(\frac{h}{2})$ هستهٔ پئانو در بازه $\left[0, \frac{h}{2}\right]$ کدام است؟

۱) $\frac{t^2}{2}$

۲) $-\frac{t^2}{2}$

۳) $\frac{(h-t)^2}{2}$

۴) $\frac{1}{2}(h+t)^2$

۲۵- دنبالهٔ روش نیوتن برای یافتن ریشهٔ $\alpha = 0$ مربوط به تابع $f(x) = \sin x$ را در نظر بگیرید. اگر دنباله به ازای هر x_0 در بازهٔ $(-x^*, x^*)$ همگرا باشد، x^* در کدام رابطه صدق می‌کند؟

۱) $-\frac{\pi}{2} < x^* < \frac{\pi}{2}$

۲) $x^* = \tan x^*$

۳) $x^* = 2\tan x^*$

۴) $2x^* = \tan x^*$

۲۶- تابع جدولی زیر داده شده است.

x_i	۰	۱	-1
f_i	۱	۳	$\frac{3}{5}$

این تابع را با کسر $\frac{P(x)}{q(x)}$ و به کمک تفاضلات وارون درونیابی کرده‌ایم. درجه $P(x)$ و درجه $q(x)$ به ترتیب کدامند؟

۱) ۰ و ۲

۲) ۰ و ۱

۳) ۱ و ۱

۴) ۱ و ۰

isipaper.org

۲۷- فرض کنید f تابعی تعریف شده در بازهٔ $[a,b]$ باشد و S_h اسپلاین درونیاب خطی f روی نقاط هم فاصله با فاصلهٔ h باشد. همه گزینه‌های زیر صحیح‌اند، به جز:

۱) s_h با مرتبهٔ h^3 به f همگرای یکنواخت است اگر $f \in c^3[a,b]$.

۲) s_h با مرتبهٔ h^2 به f همگرای یکنواخت است اگر $f \in c^2[a,b]$.

۳) s_h با مرتبهٔ h به f همگرای یکنواخت است اگر $f \in c^1[a,b]$.

۴) s_h به f همگرای یکنواخت است اگر $f \in c[a,b]$.

۲۸- فرض کنید q یک اسپلاین مکعبی با تنها یک نقطهٔ گره‌ای $x=a$ است و برای هر $x \le a$، داریم $q(x)=0$. کدام گزینه صحیح است؟

۱) q یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر ۳ است.

۲) ثابت c وجود دارد که $q(x)=c(x-a)_+^2$.

۳) ثابت c وجود دارد که $q(x)=c(x-a)_+^3$.

۴) ثابت‌های c و d وجود دارند که $q(x)=c(x-a)_+^3+d(x-a)_+^2$.

آنالیز حقیقی:

۲۹- فرض کنید m اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$، m^* اندازهٔ خارجی متناظر با m و A و B دو مجموعه در $\mathbb{R}$ باشند به‌طوری‌که B لبگ اندازه‌پذیر است، $B \subseteq A$ و $m(B)=m^*(A)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $m^*(A \setminus B)=0$

۲) مجموعه A، لبگ اندازه‌پذیر است.

۳) مجموعه $A \setminus B$، لبگ اندازه‌پذیر است.

۴) اگر $m^*(A)<\infty$ آنگاه مجموعهٔ A لبگ اندازه‌پذیر است.

۳۰- برای دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup_n |x_n|$، کدام فضا نسبت به $\|.\|_\infty$ باناخ است؟

۱) $\{\{x_n\}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$

۲) $\{\{x_n\}: \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$

۳) $\{\{x_n\}: \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$

۴) $\{\{x_n\}:$ فقط تعداد متناهی x_n ناصفر است$\}$

isipaper.org

۳۱- کدام گزینه صحیح است؟

۱) اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه $\inf\{\alpha:m(\{x:f(x)>\alpha\})=0\}=\sup\{f(x):x\in\mathbb{R}\}$

۲) اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $f_n\in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$ و $f_n\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}0$ آنگاه $f_n\xrightarrow{L^1(\mathbb{R})}0$

۳) اگر $1<p<q<\infty$ آنگاه $L^q(\mathbb{R})\subseteq L^p(\mathbb{R})$

۴) $L^\infty(\mathbb{R})\subseteq L^1(\mathbb{R})$

۳۲- فرض کنید توابع حقیقی f_n و f بر $\mathbb{R}$ لبگ انتگرال‌پذیر باشند، به طوری که دنبالهٔ $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با $\int_{\mathbb{R}}|f_n-f|dm\to 0$ معادل است؟

۱) $\int_{\mathbb{R}}|f_n|dm\to\int_{\mathbb{R}}|f|\,dm$

۲) $\int_{\mathbb{R}}f_n\,dm\to\int_{\mathbb{R}}f\,dm$

۳) $f_n\to f$ در اندازه

۴) $f_n\to f$ به‌طور یکنواخت بر $\mathbb{R}$

۳۳- اگر $E\subseteq[0,\frac{\pi}{2}]$ زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و $f(x)=\begin{cases}X_E(x)+\sin x & x\in Q\cap[0,\frac{\pi}{2}]\\ [x]+\sin x & x\in Q^c\cap[0,\frac{\pi}{2}]\end{cases}$، کدام گزینه درست است؟

۱) f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ لبگ اندازه‌پذیر نیست.

۲) f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر نیست.

۳) تابع f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

۴) تابع f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0,\frac{\pi}{2}]$ برابر $\frac{\pi}{2}-1$ است.

۳۴- فرض کنید $M=\{f\in L^2(\mathbb{R}):\forall x\in\mathbb{R}\setminus[0,1],f(x)=0\}$ و $P_M:L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})$ تصویر متعامد روی M باشد. برای هر $f\in L^2(\mathbb{R})$ داریم:

۱) $P_M(f)=f$

۲) $P_M(f)=f.x_{[0,1]}$

۳) $P_M(f)=1-f$

۴) $P_M(f)=(1-f).x_{[0,1]}$

isipaper.org

isipaper.org

۳۵- عملگر خطی $T:(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)\to(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(x,y)=(x-y,0)\quad (x,y\in\mathbb{R})$$

(برای هر $(x,y)\in\mathbb{R}^2$، $\|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$) در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $\|T\|=2\sqrt{2}$

۲) $\|T\|=1$

۳) $\|T\|=\sqrt{2}$

۴) عملگر T بی‌کران است.

تحقیق در عملیات پیشرفته ۱:

۳۶- فرض کنید جدول زیر متناظر با یکی از تکرارهای الگوریتم سیمپلکس برای حل یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	۱	−۱	−۱	۴	۰	۰	۰	۰
x_5	۰	۱	۱	۲	۰	۱	۰	۹
x_4	۰	۱	۱	−۱	۱	۰	۰	۲
x_6	۰	۱	۱	۱	۰	۰	۱	۴

با توجه به جدول، در ترکیب خطی $a_3=\alpha a_4+\beta a_5+\gamma a_6$، مقدار β کدام است؟ (a_j ستون مربوط به متغیر x_j در مسأله اولیه است.)

۱) ۱

۲) ۲

۳) −۱

۴) −۲

۳۷- کدام گزینه در ارتباط با مسأله اولیه (P) و مسأله دوگان (D) همواره صادق است؟

۱) اگر (P) جواب بهینه تبهگن(degenerate) داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه چندگانه دارد.

۲) اگر (P) جواب بهینه یکتا داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه یکتا دارد.

۳) اگر (P) جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه تبهگن دارد.

۴) اگر (P) جواب بهینه چندگانه داشته باشد، آنگاه (D) جواب بهینه چندگانه دارد.

isipaper.org

۳۸- فرض کنید مسأله برنامه‌ریزی خطی (p) به صورت

$$\min Z = c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax = b \quad (p)$$
$$x \geq 0$$

یک جواب پایه‌ای بهینه با پایه B دارد. بردار c را با بردار جدید $\bar{c} \neq c$ جایگزین کنید و مسأله جدید را $(\bar{p})$ بنامید. قرار دهید:

$$\bar{y}_{0j} = \bar{c}_B^T B^{-1} a_j - \bar{c}_j, \quad j = 1,\dots,n$$

که در آن، a_j ستون jام در ماتریس A_{mxn} است. گزینه صحیح کدام است؟

۱) B یک پایه شدنی برای $(\bar{p})$ است و $\bar{y}_{0j} \neq 0$ به ازای برخی متغیرهای پایه‌ای x_j.

۲) B یک پایه شدنی برای $(\bar{p})$ است و $\bar{y}_{0j} = 0$ به ازای هر متغیر پایه‌ای x_j.

۳) تنها اگر $\bar{c}_j \neq c_j$ به ازای برخی x_j پایه‌ای، آنگاه $\bar{y}_{0j} \neq 0$ امکان دارد.

۴) $\bar{y}_{0j} = 0$ به ازای هر متغیر پایه‌ای x_j ولی B ممکن است یک پایه شدنی نباشد.

۳۹- برای حل مسأله

$$\min \ 3x_1$$
$$\text{s.t.}$$
$$\varepsilon x_1 - 2x_2 \geq \varepsilon$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

که در آن $\varepsilon > 0$، با استفاده از روش Mـ بزرگ کدام گزینه صحیح است؟

۱) $M > \frac{3}{\varepsilon}$.

۲) $M > 3\varepsilon$.

۳) $M > \frac{\varepsilon}{3}$.

۴) $M < 3\varepsilon$.

۴۰- بخشی از یک جدول سیمپلکس به صورت زیر داده شده است. با استفاده از قاعده ممانعت دوری بلند (Bland) متغیر وارد شونده کدام است؟ (مسأله کمینه‌سازی است.)

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
Z	۱	۰	۰	۲	۰	۴	۴	۴	
x_2		۰	۱		۰				
x_4		۰	۰		۱				
x_1		۱	۰		۰				

۱) x_7.

۲) x_6.

۳) x_3.

۴) x_5.

isipaper.org

۴۱- یکی از تکرارهای ناتباهیده الگوریتم سیمپلکس با متغیرهای کران‌دار برای حل مسأله

$$\min c^T x$$
$$s.t.$$
$$Ax = b$$
$$l \le x \le u$$

با $l_1 = ۲$ ، $l_2 = ۳$، $u_1 = ۴$ و $u_2 = ۵$ را در نظر بگیرید. فرض کنید x_1 و x_2 در این تکرار به ترتیب پایه‌ای و غیرپایه‌ای هستند. $x_1 x_2$ کدام یک از مقادیر داده شده را می‌تواند بگیرد؟

۱) ۰

۲) ۶

۳) ۱۰

۴) ۲۰

۴۲- مسأله (p) را به صورت

$$\max z = \sum_{i=1}^{m} y_i$$
$$s.t.$$
$$Ax + y = b$$
$$x \ge 0$$
$$y \le 0$$

در نظر بگیرید. دستگاه $Ax = b$ یک جواب $x \ge 0$ دارد ....

۱) اگر (p) بی‌کران نباشد.

۲) اگر دوگان (p) بی‌کران نباشد.

۳) اگر (p) و دوگان (p) هر دو شدنی باشند.

۴) اگر و تنها اگر دوگان (p) جواب بهینه با مقدار بهینه برابر با صفر داشته باشد.

۴۳- مسأله برنامه‌ریزی خطی (p) را به‌صورت

$$\max z = c^T x$$
$$s.t. \qquad (p)$$
$$Ax \le b$$

در نظربگیرید. فرض کنید $b \ge 0$ و $Ax \le b \Rightarrow c^T x \le 0$.

گزینه صحیح کدام است؟

۱) $u \ge 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T u = c$.

۲) بردار $u = 0$ جواب بهینه برای دوگان (p) است.

۳) $u \le 0$ وجود دارد به‌طوری‌که $A^T u = c$.

۴) $A^T u = c$ جواب ندارد.

isipaper.org

۴۴- فرض کنید مجموعه $S=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\geq b, x\geq 0\right\}$ کران‌دار است. دستگاه

$$I: A^Ty<c\ ,\ y\geq 0$$

را در نظر بگیرید ($c\in\mathbb{R}^n$ برداری ثابت و y بردار متغیرهاست). گزینه صحیح کدام است؟

۱) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c<0$.

۲) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c>0$.

۳) دستگاه I جواب دارد اگر و تنها اگر $c\neq 0$.

۴) دستگاه I به ازای هر $c\in\mathbb{R}^n$ جواب دارد.

۴۵- مدل برنامه‌ریزی خطی زیر را برای $\lambda>0$ در نظر بگیرید:

$$z^*(\lambda)=\text{Max } z(\lambda)=\lambda c^Tx$$

$$\text{s.t.} \quad Ax\leq \frac{1}{\lambda}b$$

$$x\geq 0$$

در واقع، $z^*(\lambda)$ مقدار بهینه مسأله بالا به ازای $\lambda>0$ داده شده است. فرض کنید $z^*(1)$ موجود و متناهی است. کدام گزینه درست است؟

۱) $z^*(\lambda)$ تابعی ثابت نسبت به λ است.

۲) $z^*(\lambda)$ تابعی افزایشی نسبت به λ است.

۳) ممکن است $z^*(\lambda)$ برای برخی از مقادیر λ موجود نباشد.

۴) $z^*(\lambda)$ تابعی کاهشی نسبت به λ است.

isipaper.org

isipaper.org

پژوهش برتر
isipaper.org

isipaper.org

پژوهش برتر
isipaper.org